

**DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA**  
**POSGRADO EN INGENIERÍA ESTRUCTURAL**

**FORMULACIÓN DE ELEMENTOS VIGA-COLUMNA CON**  
**DISCONTINUIDADES INTERIORES PARA EL ESTUDIO DEL**  
**COLAPSO EN ESTRUCTURAS**

**TESIS**

**PARA OBTENER EL GRADO DE:**

**DOCTOR EN INGENIERÍA ESTRUCTURAL**

**P R E S E N T A:**

**ENRIQUE TENORIO MONTERO**

**DIRECTOR DE TESIS**

**DR. GELACIO JUÁREZ LUNA**

México, D.F.

JUNIO 2015

**“Las dificultades preparan personas comunes para destinos extraordinarios”**

**C. S. Lewis**

## **AGRADECIMIENTOS**

Primero quiero agradecer al Maestro de maestros, nuestro Dios, por darme la fuerza para enfrentar y librar este compromiso.

A mis hermanos y sus familias por el apoyo moral y el cariño que me expresan aun cuando haya estado distante de ellos.

A mi hermano Juan y, mi amigo, Ing. Luis Barahona por la confianza puesta en mí, al brindar su colaboración incondicional.

Muy especialmente al Dr. Gelacio Juárez Luna, por la tutoría y su invaluable colaboración en el desarrollo de este tema de investigación, por todo el tiempo y paciencia concedida.

Al Dr. Manuel Eurípides Ruiz Sandoval por su valiosa colaboración, consejos y guía en la admisión y desenvolvimiento en el posgrado y vida en la ciudad de México.

A la Ing. Carmen Elisa Domínguez por su respaldo en los trámites administrativos en la Universidad Tecnológica de Panamá.

Al Dr. Arturo Tena Colunga, por sus consejos y apoyo administrativo como Coordinador del Posgrado, y ser parte del comité sinodal de este trabajo.

A los sinodales: Dr. Gustavo Ayala Milián, Dr. Luciano Fernandez Sola y Dr. Norberto Domínguez Ramírez, por sus recomendaciones para el perfeccionamiento del trabajo de tesis.

A los profesores del posgrado que brindaron sus conocimientos: Dra. María de la Consolación Gómez Soberón, Dr. Arturo Tena Colunga, Dr. Gelacio Juárez Luna, Dr. Manuel E. Ruiz Sandoval, Dr. Alonso Gómez Bernal, Dr. Luciano Fernández Sola.

A la Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Azcapotzalco.

A la Universidad Tecnológica de Panamá, por la licencia concedida para los estudios doctorales.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT), por la beca otorgada.

A mis amistades y compañeros de la Dirección General de Ingeniería y Arquitectura de la Universidad Tecnológica de Panamá.

A todos mis compañeros y amigos del Posgrado de la Universidad Autónoma Metropolitana.

# Índice

<b>1</b>	<b>Introducción.....</b>	<b>1</b>
1.1	OBJETIVO .....	2
1.2	ANTECEDENTES.....	3
1.2.1	<i>Elementos viga con comportamiento no lineal .....</i>	<i>3</i>
1.2.2	<i>Daño y colapso en túneles .....</i>	<i>5</i>
1.3	JUSTIFICACIÓN .....	8
1.4	HIPÓTESIS DE TRABAJO .....	8
<b>2</b>	<b>Elemento viga-columna con discontinuidades interiores .....</b>	<b>10</b>
2.1	FORMULACIÓN DEL ELEMENTO BARRA CON DISCONTINUIDADES INTERIORES.....	10
2.1.1	<i>Funcional de energía.....</i>	<i>10</i>
2.1.2	<i>Minimización del funcional de energía .....</i>	<i>12</i>
2.2	FORMULACIÓN DEL ELEMENTO VIGA DELGADA CON DISCONTINUIDADES .....	13
2.2.1	<i>Funcional de energía.....</i>	<i>14</i>
2.2.2	<i>Minimización del funcional.....</i>	<i>16</i>
2.2.3	<i>Matriz de rigideces y vector de fuerzas .....</i>	<i>16</i>
2.3	FORMULACIÓN DE VIGA GRUESA CON DISCONTINUIDADES .....	17
2.3.1	<i>Funcional de energía.....</i>	<i>18</i>
2.3.2	<i>Extremización del funcional.....</i>	<i>20</i>
2.3.3	<i>Matrices de rigideces.....</i>	<i>22</i>
2.4	ACOPLAMIENTO DE LOS ELEMENTOS BARRA Y VIGA CON DISCONTINUIDADES INTERIORES .....	23
2.4.1	<i>Condensación de matrices .....</i>	<i>24</i>
<b>3</b>	<b>Modelos constitutivos .....</b>	<b>26</b>
3.1	MODELO DE DAÑO .....	26
3.2	MOMENTO-CURVATURA.....	29
3.3	CORTANTE-DEFORMACIÓN POR CORTANTE .....	33
3.3.1	<i>Elemento con refuerzo transversal .....</i>	<i>33</i>
3.3.2	<i>Elemento sin refuerzo transversal .....</i>	<i>36</i>
3.4	FUERZA AXIAL-DEFORMACIÓN .....	39
3.5	JUNTAS LONGITUDINALES ENTRE DOVELAS.....	42
3.5.1	<i>Momento-rotación .....</i>	<i>43</i>
3.5.2	<i>Deslizamiento por cortante .....</i>	<i>44</i>
<b>4</b>	<b>Estrategia de solución .....</b>	<b>47</b>
4.1	IMPLANTACIÓN DEL ELEMENTO VIGA-COLUMNA CON DISCONTINUIDADES INTERIORES.....	49
4.2	IMPLANTACIÓN DE LOS MODELOS CONSTITUTIVOS MOMENTO-CURVATURA CORTANTE-DESPLAZAMIENTO TRANSVERSAL Y FUERZA NORMAL-DESPLAZAMIENTO AXIAL .....	52
<b>5</b>	<b>Ejemplos de aplicación .....</b>	<b>56</b>



5.1	DISCONTINUIDADES EN VIGAS .....	56
5.1.1	<i>Viga sujeta a momento en el extremo.....</i>	56
5.1.2	<i>Viga en voladizo sujeta a momento y fuerza axial .....</i>	59
5.1.3	<i>Viga en voladizo sujeta a carga vertical .....</i>	60
5.1.4	<i>Viga en voladizo sujeta a carga vertical con deformación por cortante .....</i>	62
5.1.5	<i>Viga simplemente apoyada .....</i>	65
5.2	DISCONTINUIDADES EN MARCOS .....	67
5.2.1	<i>Marco de dos niveles .....</i>	67
5.2.2	<i>Marco de un solo nivel.....</i>	72
5.3	DISCONTINUIDADES EN TÚNELES DOVELADOS.....	75
5.3.1.1	Túnel A .....	77
5.3.1.1.1	Modelos numéricos .....	78
5.3.1.1.2	Modelos constitutivos.....	79
5.3.1.1.3	Resultados.....	83
5.3.1.2	Túnel B .....	85
5.3.1.2.1	Modelo numérico .....	86
5.3.1.2.2	Modelos constitutivos.....	87
5.3.1.2.3	Resultados.....	88
<b>6</b>	<b>Conclusiones y Recomendaciones .....</b>	<b>91</b>
6.1	CONCLUSIONES.....	91
6.2	RECOMENDACIONES .....	92
6.3	TRABAJOS FUTUROS.....	93
<b>7</b>	<b>Referencias .....</b>	<b>94</b>
<b>Anexo A.....</b>	<b>.....</b>	<b>98</b>

# Lista de figuras

Figura 1.1 Cinemática de la viga Timoshenko con discontinuidades (adaptado de Armero y Ehrlich 2002).	4
Figura 1.2 Discontinuidad axial en las fibras de la sección del elemento viga (adaptado de Jukic 2013).	5
Figura 1.3 Separación de la presión del suelo sobre el tunel: a) total, b) uniforme y c) ovalización (adaptado de Blom 2002).	6
Figura 1.4 a) formación de articulaciones y b) curva carga contra desplazamiento (adaptada de Blom 2010).	6
Figura 1.5 Discretización utilizada por van der Waart van Gulik (2010)	7
Figura 1.6 Junta ensayada por Leonhardt y Reimann (1966).	7
Figura 2.1 Elemento barra con discontinuidades interior.	10
Figura 2.2 Representación gráfica de la función $M_s$ .	11
Figura 2.3 Elemento viga delgada con discontinuidad en rotación.	14
Figura 2.4 Densidad de energía de deformación en: a) en la parte continua de la viga y b) en la zona de localización (adaptado de Juarez y Ayala 2009)	14
Figura 2.5 Cinemática de las vigas gruesas.	18
Figura 2.6 Elemento viga de gruesa con discontinuidad en desplazamiento transversal y rotación.	19
Figura 2.7 Grados de libertad en vigas con discontinuidades: a) delgadas y b) gruesas.	24
Figura 3.1 Modelo de daño para elementos sólidos: a) continuo y b) discreto	27
Figura 3.2 Modelo de daño: a) continuo b) discreto.	27
Figura 3.3 Representación de la energía libre.	28
Figura 3.4 Sección de concreto reforzada.	29
Figura 3.5 Modelo constitutivo momento-curvatura.	30
Figura 3.6 Función de ablandamiento $q(r)$	31

Figura 3.7 Ablandamiento negativo: a) momento-salto b) función de ablandamiento discreto. ....	32
Figura 3.8 Representación de la membrana (adaptada de Pang y Hsu 1996): a) membrana reforzada, b) representación del esfuerzo en el concreto, c) esfuerzos en el acero y d) dirección de los ejes principales. ....	33
Figura 3.9 Curva: a) esfuerzo cortante-deformación (adaptada de Pang y Hsu 1996) y b) cortante-deformación.....	34
Figura 3.10 Función de ablandamiento daño continuo continuo.....	35
Figura 3.11 Curva: a) cortante-salto desplazamiento transversal, b) función de ablandamiento.....	36
Figura 3.12 Comportamiento constitutivo: a) con acción de dovelas, b) idealizado (adaptado de Rots <i>et al.</i> 1987) .....	37
Figura 3.13 Determinación de ancho de grietas (adaptado de Muttoni y Fernández 2008)	38
Figura 3.14 Comportamientos constitutivos: a) continuo, b) discreto .....	38
Figura 3.15 Función de ablandamiento: a) continuo, b) discreto .....	39
Figura 3.16 Curvas de esfuerzo-deformación: a) concreto, b) acero.....	39
Figura 3.17 Modelo constitutivo fuerza normal-deformación axial.....	40
Figura 3.18 Función $q(r)$ de ablandamiento axial. ....	41
Figura 3.19 a) Fuerza normal-salto axial, b) Función de ablandamiento discreto. ....	42
Figura 3.20 Junta longitudinal: a) contacto entre dovelas, b) discretización .....	43
Figura 3.21 a) junta ensayada por Leonhardt y Reimann (1966) y b) curva momento-curvatura Jansen (1983).....	43
Figura 3.22 a) comportamiento constitutivo momento-curvatura idealizado y b) función de ablandamiento positivo.....	44
Figura 3.23 a) Elementos ensayados y fuerzas aplicadas, b) comportamiento constitutivo (adaptado de Scott 2010). ....	45
Figura 3.24 Curva en la junta a) cortante-desplazamiento, b) función de ablandamiento por cortante. ....	46

Figura 4.1 Diagrama de flujo del algoritmo del elemento viga-columna delgadas con discontinuidades .....	50
Figura 4.2 Diagrama de flujo del algoritmo del elemento viga-columna gruesas con discontinuidades .....	51
Figura 4.3 Representación del algoritmo del modelo constitutivo para el elemento viga-columna con discontinuidades sin deformación por cortante.....	53
Figura 4.4 Algoritmo del modelo constitutivo para el elemento viga-columna con discontinuidades con deformación por cortante .....	54
Figura 5.1 Viga en canto libre: a) y b) geometría y aplicación de fuerzas, c) sección transversal reforzada.....	57
Figura 5.2 Comportamientos constitutivos: a) momento-curvatura y b) fuerza normal-deformación axial .....	57
Figura 5.3 Discretización de la viga en canto libre. ....	57
Figura 5.4 Comportamientos constitutivos discretos; a) momento-salto rotación y b) fuerza normal-salto desplazamiento axial .....	58
Figura 5.5 Curva de la variación momento contra rotación: a) momento contra salto rotación, b) comportamiento total .....	59
Figura 5.6 Comportamiento constitutivo momento contra salto de rotación. ....	59
Figura 5.7 Variación del momento, $M$ , debido al incremento de rotaciones, $\phi$ : a) salto de rotación, b) comportamiento total. ....	60
Figura 5.8 Viga canto libre a) geometría y carga y b) sección transversal reforzada. ....	60
Figura 5.9 Comportamientos constitutivos: a) momento-curvatura y b) fuerza normal-deformación axial .....	61
Figura 5.10 Comportamientos constitutivos discretos: a) momento contra salto de rotación, b) fuerza normal contra salto en el desplazamiento axial.....	61
Figura 5.11 Curvas de variaciones: a) comparación de resultados, b) momento contra salto por rotación y c) $P$ contra desplazamiento vertical $v$ en el intervalo de salto rotación. ....	62
Figura 5.12 a) Geometría y carga, b) sección transversal reforzada. ....	62
Figura 5.13 Comportamientos a) momento contra curvatura; b) cortante contra deformación por cortante. ....	63

Figura 5.14 Comportamientos constitutivos discretos: a) momento contra salto de rotación, b) cortante contra salto del desplazamiento transversal. ....	63
Figura 5.15 Momento contra desplazamiento ( $v$ ).....	64
Figura 5.16 Curvas: a) carga contra desplazamiento $v$ y b) carga $P$ contra desplazamiento $v$ en el intervalo del salto en la discontinuidad por rotación. ....	65
Figura 5.17 Variación en la discontinuidad de: a) momento contra salto de rotación, b) cortante contra salto en desplazamiento por cortante. ....	65
Figura 5.18 Viga sometida a prueba de cortante: a) geometría y b) sección transversal .....	66
Figura 5.19 Comportamientos constitutivos: a) momento-curvatura y b) cortante-deformación por cortante.....	66
Figura 5.20 Comportamientos constitutivos discretos: a) momento contra salto de rotación, b) cortante contra salto de desplazamiento transversal. ....	66
Figura 5.21 Discretización de la viga. ....	67
Figura 5.22 Resultados en el nodo 5 (centro de la viga): a) cortante-desplazamiento y b) momento-desplazamiento.....	67
Figura 5.23 a) marco estructural y b) detalle de las secciones transversales.....	68
Figura 5.24 Comportamiento constitutivo: a) momento-curvatura y b) normal-deformación axial .....	68
Figura 5.25 Comportamientos constitutivos contra salto en la discontinuidad por: a) momento-rotación de vigas, b) momento-rotación de columnas y c) fuerza normal-desplazamiento axial.....	69
Figura 5.26 Discretización del marco.....	69
Figura 5.27 Carga, $F$ , contra desplazamiento, $u$ . ....	70
Figura 5.28 Articulaciones: a) secuencia de ocurrencia y b) variación del momento.....	71
Figura 5.29 Variación de la magnitud las reacciones $R_1$ y $R_2$ . ....	71
Figura 5.30 a) geometría del marco y b) sección transversal para columnas y viga.....	72
Figura 5.31 comportamiento constitutivo: a) momento-curvatura, b) cortante-deformación y c) normal-deformación axial. ....	73

Figura 5.32 Comportamientos constitutivos discretos en el salto de: a) momento contra rotación, b) cortante contra desplazamiento transversal y c) fuerza axial contra desplazamiento axial.....	73
Figura 5.33 Discretización y condiciones de frontera del modelo numérico. ....	73
Figura 5.34 Comportamiento P contra $v$ .....	74
Figura 5.35 Momento contra desplazamiento $v$ : a) conexión viga-columna y b) centro de la viga .....	74
Figura 5.36 Secuencia de articulaciones .....	75
Figura 5.37 Estructuras ensayadas adaptadas de: a) Aguilar <i>et al.</i> (2011) y b) Blom y van Oosterhout (2001).....	76
Figura 5.38 a) conexión entre anillos b) elementos del modelo numérico.....	77
Figura 5.39 Geometría del túnel A en la etapa: a) Solo dovelas y b) con revestimiento secundario.....	77
Figura 5.40 Sección transversal del elemento de concreto reforzado .....	78
Figura 5.41 Sistemas de cargas aplicadas en kN: a) primera etapa b) segunda etapa .....	78
Figura 5.42 Elementos del modelo numérico en la: a) primera etapa, y b) segunda etapa .	79
Figura 5.43 Modelos constitutivos de las dovelas: a) momento-curvatura, b) cortante-deformación y c) fuerza normal-deformación axial .....	80
Figura 5.44 Comportamientos constitutivos discretos de las dovelas para el salto de: a) momento contra rotación, b) cortante contra desplazamiento transversal y c) fuerza normal contra desplazamiento axial. ....	80
Figura 5.45 Modelos constitutivos de la junta longitudinal de las dovelas: a) momento-rotación, b) cortante- desplazamiento y c) fuerza normal-deformación.....	80
Figura 5.46 Comportamientos constitutivos discretos en la junta longitudinal para el salto de: a) momento contra rotación, b) cortante contra desplazamiento por cortante y c) fuerza axial contra desplazamiento axial.....	81
Figura 5.47 Modelos constitutivos del revestimiento secundario: a) momento-curvatura, b) cortante-deformación y c) fuerza normal-deformación.....	81

Figura 5.48 Comportamientos constitutivos discretos del revestimiento secundario de: a) momento contra salto de rotación, b) cortante contra salto de desplazamiento por cortante y c) fuerza normal contra salto de desplazamiento axial.....	82
Figura 5.49 Modelos constitutivos revestimiento secundario (cubeta): a) momento-curvatura, b) cortante-deformación y c) fuerza normal-deformación .....	82
Figura 5.50 Comportamientos constitutivos discretos en la cubeta: a) momento contra salto de rotación, b) cortante contra salto del desplazamiento transversal y c) fuerza normal contra salto en el desplazamiento axial. ....	82
Figura 5.51 a) puntos de control de mediciones y b) desplazamientos observados. ....	83
Figura 5.52 Curvas carga vertical contra desplazamiento: a) acortamiento entre los puntos 1-7 y expansión entre los puntos 10-4.....	83
Figura 5.53 Elementos mecánicos: a) momento (kN-m), b) cortante (kN) y c) fuerza normal (kN).....	84
Figura 5.54 Elementos mecánicos del anillo dovelado: a) momento ( <i>kN-m</i> ), b) cortante ( <i>kN</i> ) y c) fuerza normal ( <i>kN</i> ).....	84
Figura 5.55 Elementos mecánicos del revestimiento secundario: a) momento kN-m, b) cortante y c) fuerza normal kN.....	85
Figura 5.56 a) aplicación de fuerzas y b) cargas máximas (kN) .....	86
Figura 5.57 Geometría del túnel B. ....	86
Figura 5.58 Modelos constitutivos del elemento viga-columna para las dovelas: a) momento-curvatura, b) cortante-deformación y c) fuerza normal-deformación axial. ....	87
Figura 5.59 Comportamientos constitutivos discretos de las dovelas: a) momento contra salto de rotación, b) cortante contra salto de desplazamiento transversal y c) fuerza normal contra salto en el desplazamiento axial. ....	87
Figura 5.60 Modelos constitutivos para la junta longitudinal: a) momento-rotación idealizado, b) cortante-desplazamiento y c) fuerza normal-deformación. ....	88
Figura 5.61 Comportamientos constitutivos discretos en la junta longitudinal: a) momento contra salto de rotación, b) cortante contra salto de desplazamiento y c) fuerza normal contra salto en desplazamiento axial. ....	88
Figura 5.62 Comportamiento del modelo experimental y numérico: a) conformación deformada y b) curva carga contra el acortamiento vertical .....	89

Figura 5.63 Elementos mecánicos: a) momento (kN-m), cortante (kN) y c) fuerza normal (kN).....	89
Figura 5.64 Zonas articuladas en el anillo central: a) modelo numérico y b) prueba experimental (adaptado de Luttikholt 2007) .....	90
Figura 0.1 a) comportamiento esfuerzo-deformación, b) función de ablandamiento $q(r)$ . ..	98



## **Lista de tablas**

Tabla 4.1 Estructura de la entrada de datos en el programa FEAP .....	47
Tabla 4.2 Estructura del comando MATerial. ....	48

## RESUMEN

Se formulan e implantan elementos finitos viga-columna con discontinuidades embebidas para modelar la formación de articulaciones en elementos estructurales ante acciones de cargas cuasi-estáticas. Los elementos finitos se desarrollaron mediante la aproximación de funcionales de energía de elementos barras y vigas. En la formulación de estos elementos se desarrollaron vigas delgadas, las cuales incluyen la energía de deformación por flexión, y vigas gruesas que además consideran las deformaciones por cortante. Las matrices de los elementos barras y vigas se agruparon para obtener el elemento viga-columna delgada, el cual puede desarrollar discontinuidades en el desplazamiento axial y en la rotación, así como el elemento viga-columna gruesa que además puede desarrollar discontinuidades en el desplazamiento transversal.

El comportamiento constitutivo del elemento viga-columna considera la fuerza normal contra el desplazamiento axial, la fuerza cortante contra la deformación por cortante y el momento contra rotación. Estos modelos constitutivos se implantaron con base en la mecánica del daño. Los comportamientos constitutivos se formularon a partir de resultados de pruebas experimentales o numéricas reportadas en la literatura. Adicionalmente, se implantaron los comportamientos constitutivos de juntas longitudinales entre elementos de concreto para el estudio de túneles contruidos con dovelas.

Para validar los elementos finitos y modelos constitutivos, se realizaron ejemplos correspondientes a vigas, marcos y túneles dovelados, los cuales se discretizaron con elementos vigas-columnas gruesas y/o delgadas. Los resultados numéricos obtenidos mostraron congruencia con los resultados de pruebas experimentales y numéricas reportadas en la literatura.

## ABSTRACT

“Beam-column” finite elements with embedded discontinuities for modeling hinge development in structural elements under quasi-static load actions are formulated and implemented. The finite elements were developed by approximating the energy functional of bars and beam elements. In the formulation of these elements, thin beams were developed, which consider flexural strain energy, and thick beams, which also consider shear strain energy. The matrices of bars and beams elements were grouped together to obtain the thin beam-column element, which could develop discontinuities in the axial displacement and in the rotation, and the beam-column thick element, which also could develop discontinuities in the transverse displacement.

The constitutive behavior of beam-column element considers the normal force vs axial displacement; shear force vs shear deformation and the moment vs rotation. These constitutive models were implemented based on damage mechanics. Constitutive behavior was formulated from experimental results and/or numerical tests reported in the literature. Additionally, the constitutive behavior of longitudinal joints between concrete elements were implemented for the study of segmented tunnels.

To validate the finite elements and constitutive models, examples for beams, frames and segmented tunnels were performed, which were discretized with thick and/or thin beam-columns elements. The numerical results show consistency with the results of experimental and numerical tests reported in the literature.

# CAPÍTULO 1

## Introducción

---

Una estructura presenta daño incipiente cuando las acciones externas o internas alcanzan los valores umbrales de la resistencia de los materiales. El incremento del daño puede llevar al colapso de las estructuras. El colapso puede darse cuando se presentan fenómenos como: inestabilidad (pandeo), excesiva deformación plástica (fluencia generalizada), fatiga (cargas cíclicas), corrosión, fractura, etc. El estudio del inicio del daño y evolución al colapso en estructuras es de importancia para conocer la carga última o su capacidad residual, lo cual depende del comportamiento constitutivo de los materiales, así como de las acciones de fuerzas dinámicas o sobrecargas estáticas que afectan las estructuras.

Existen reportes sobre colapsos de estructuras tipo edificación, como el ocurrido en el Hotel Hyatt Regency, Kansas City, Estados Unidos (Pfrang y Marshall 1982) y el Edificio Industrial en Savar, Bangladesh (WHO 2013). Ambos colapsos fueron generados por excesos de cargas vivas aplicadas sobre la estructura. También han colapsado estructuras subterráneas, como los túneles Tufiño en Quito, Ecuador (El Comercio 2013), y Sochi en Rusia (Menéndez 2013). Ambos colapsos se debieron a sobrecargas de material acumulado en el nivel superior, edificaciones y equipo pesado sobre la superficie inmediata a los mismos.

En estructuras, tales como los edificios, los elementos estructurales pueden ser afectados por cargas adicionales a las del diseño o por acciones externas tales como: sismos, explosiones, colapso de estructuras vecinas, actividades de construcción, etc. En el caso de túneles ya existentes, pueden ocurrir modificaciones de los estados de esfuerzos en el medio en el que están contruidos, debido a la construcción en la cercanía de nuevas estructuras como: edificios, colocación de pilas o pilotes, muros Milán, extracción de suelos e inclusive nuevos túneles, que provocan desplazamientos o incrementos de cargas adicionales a las del diseño inicial en sus elementos estructurales (Devriendt 2010).

Para entender el mecanismo de falla en túneles, se ha estudiado el efecto de las cargas de ovalización, en el que los anillos que lo conforman se deforman con una configuración ovalada. Al incrementar la ovalización, se producen grandes deformaciones y elementos mecánicos excesivos, y en el peor de los casos se generan articulaciones o dislocaciones en el eje de las dovelas, causando pérdida de estabilidad en el anillo o que no se puedan transmitir las fuerzas internas desarrolladas en las dovelas, por lo que la estructura colapsaría. Este problema fue estudiado por Doran *et al.* (2000), quienes reportaron la

afectación en dos túneles existentes debido a la construcción subterránea de una línea nueva de trenes de pasajeros junto con dos estaciones de transbordo.

Para modelar la evolución al colapso en estructuras se ha utilizado principalmente el método de los elementos finitos, con el cual en ocasiones es necesario utilizar estrategias para la discretización, dado que en algunos casos los programas de análisis no disponen de modelos constitutivos o de tipos de elementos finitos capaces de modelar adecuadamente el comportamiento desde el intervalo elástico, agrietamiento o fluencia incipiente, propagación de agrietamiento o fluencia y su evolución al colapso. Para superar algunas de estas limitantes se agregan resortes o elementos rígidos, que pueden proporcionar un modelo numérico mal condicionado.

Actualmente se han desarrollado elementos finitos capaces de simular el daño por rotación y por dislocación de su eje, sin considerar la apertura o aplastamiento, relacionados respectivamente con cada grado de libertad de elementos vigas-columna. De hecho, existen formulaciones en las que resultan elementos con matrices asimétricas, como los desarrollados por Erlich y Armero (2004), que pueden dificultar su solución. Además, no existe un fundamento energético para los modelos basados en desplazamientos: momento-salto rotación, cortante-salto desplazamiento transversal y fuerza normal-salto axial de elementos de concreto reforzado. Lo anterior motiva al desarrollo e implantación de elementos finitos tipo viga-columna que tengan la capacidad de simular el comportamiento de los elementos estructurales desde el intervalo lineal hasta la formación de articulaciones que lleven al colapso.

El elemento finito propuesto se formula a partir de funcionales de energía de barras y vigas con base en la teoría de Euler-Bernoulli y Timoshenko, a los que se les incluyen discontinuidades embebidas de desplazamiento axial y transversal, así como de rotación, debidas a la acción respectiva de carga axial, cortante y momento. Los elementos finitos y modelos constitutivos desarrollados se implantan subrutinas en FORTRAN en el programa FEAP (Taylor 2008), acrónimo de su nombre en el idioma inglés, *Finite Element Analysis Program*.

## **1.1 Objetivo**

El presente trabajo tiene como objetivo formular e implantar un elemento finito viga-columna con discontinuidades interiores para estudiar el colapso en estructuras planas. Este elemento tiene la capacidad de modelar discontinuidades: 1) en el eje, apertura o aplastamiento, 2) fuera de su eje, dislocación, y 3) en la rotación, articulación, las cuales están asociadas respectivamente a fuerza normal, cortante y momento flexionante.

El elemento finito viga-columna formulado presenta ventajas respecto a los anteriores, porque no requiere de elementos adicionales como resortes, pues al discretizar una

estructura con este elemento se evita la dependencia de la malla, ya que tiene la capacidad de desarrollar discontinuidades en cualquier lugar geométrico del elemento, donde se alcance la superficie de falla del material.

Para cumplir este objetivo se tendrán las siguientes metas:

- Proponer una formulación variacional del elemento finito viga-columna con discontinuidades interiores.
- Implantar el elemento finito viga-columna con discontinuidades interiores en el programa FEAP.
- Formular e implantar los modelos constitutivos semi-empíricos del comportamiento momento-salto de la rotación, cortante-salto del desplazamiento transversal y fuerza normal-salto en el desplazamiento axial.
- Validar y calibrar los elementos y modelos constitutivos con datos experimentales y analíticos reportados en la literatura.
- Analizar modelos numéricos de estructuras, incluyendo túneles, utilizando el elemento finito viga-columna con discontinuidades interiores y los modelos constitutivos implantados en FEAP.

## **1.2 Antecedentes**

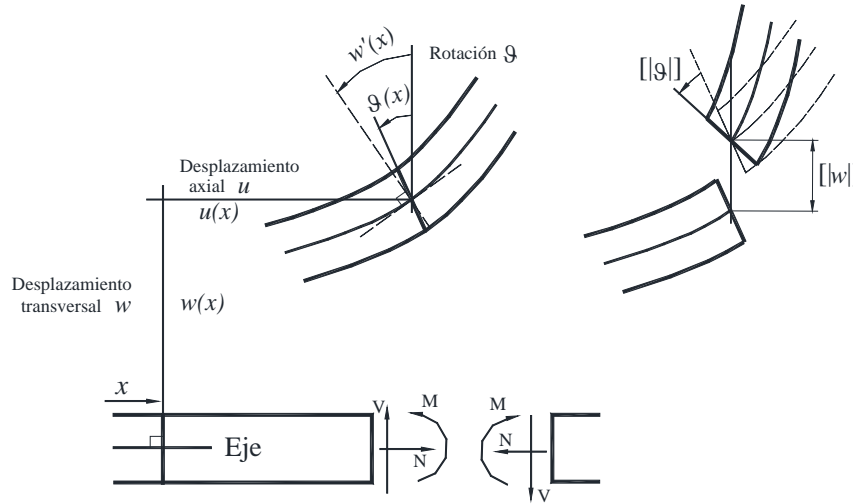
Se presentan los principales avances en el estado del arte de las técnicas de modelado y desarrollos de elementos finitos para el estudio del colapso en elementos estructurales tipo viga-columna. Primero se muestran los desarrollos para el análisis de estructuras y, posteriormente, como un caso particular, el estudio de daño y colapso en estructuras de túneles dovelados.

### **1.2.1 Elementos viga con comportamiento no lineal**

Para el análisis de elementos viga-columna en su evolución al colapso, Baker y Hyman (1969) modelan el daño como articulaciones plásticas, utilizando modelos constitutivos momento-curvatura elastoplásticos o con ablandamiento positivo, que no consideran el ablandamiento que se presenta después de alcanzar la carga última.

Ehrlich y Armero (2004) formularon un elemento finito tipo viga de Timoshenko con la capacidad de modelar discontinuidades de rotación  $[[\theta]]$ , y discontinuidad en el desplazamiento transversal,  $[[w]]$ , las cuales se muestra en la Figura 1.1. Sin embargo, esta formulación requiere de funciones definidas por los autores, como operadores de deformación, necesarios para mejorar la solución, con los que se obtienen matrices de rigideces asimétricas que pueden presentar dificultades por atoramientos computacionales al realizar el proceso de cálculo. Posteriormente, estos mismos autores, Armero y Ehrlich

(2006), desarrollaron un elemento finito con discontinuidades embebidas con base en la teoría de vigas de Euler-Bernoulli, en el que solo estudian las discontinuidades por articulación.



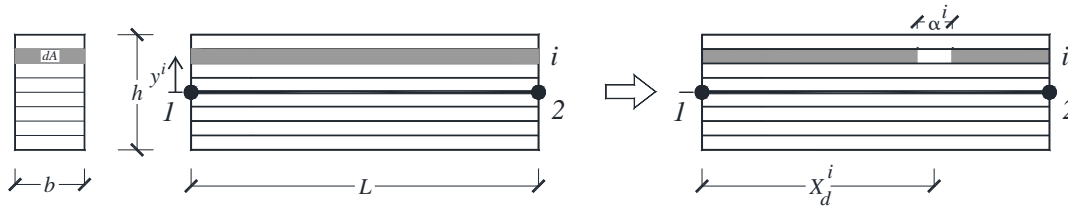
**Figura 1.1 Cinemática de la viga Timoshenko con discontinuidades (adaptado de Armero y Ehrlich 2002).**

Dujc *et al.* (2010) desarrollaron un modelo multi-escala para el estudio de discontinuidades interiores axiales y rotacionales, en el cual utilizaron elementos sólidos en 2D para la micro-escala y elementos vigas Euler-Bernoulli para la macro-escala. El comportamiento no lineal de los elementos se representó mediante modelos constitutivos de esfuerzo-deformación y momento-curvatura, para cada una de las discontinuidades consideradas. Se consideró que el daño en la estructura inicia cuando sus deformaciones alcanzan la superficie de falla de los modelos constitutivos en cualquiera de las dos discontinuidades consideradas.

Juárez y Ayala (2012) desarrollaron una formulación para vigas gruesas y delgadas con discontinuidades embebidas con base en funcionales de energía, cuyas aproximaciones con elementos finitos proporcionan matrices simétricas, bien condicionadas, las cuales fueron validadas con ejemplos reportados en la literatura. Estos autores presentan una formulación de modelos constitutivos por flexión y cortante, suponiendo que existe ablandamiento después de alcanzar un valor umbral, sin considerar el acoplamiento de ambos efectos, ni un fundamento energético para definir el área debajo de las respectivas curvas momento-salto rotación o cortante-salto desplazamiento transversal.

Jukic *et al.* (2013) formularon un elemento finito con discontinuidades interiores basado en la teoría de Euler-Bernoulli, en el que sólo se considera la discontinuidad de la rotación.

Estos autores consideraron el comportamiento constitutivo momento-curvatura de una viga de concreto reforzado, semejante al desarrollado por Dujc *et al.* (2010), en el que se considera el ablandamiento posterior al intervalo plástico. Posteriormente, Jukic (2013) desarrolló un elemento finito que considera la no-linealidad axial en vigas tipo Euler-Bernoulli y Timoshenko. Este autor consideró una sección de viga discretizada en fibras, como las que se muestran en la Figura 1.2, a las cuales les atribuyó el comportamiento constitutivo esfuerzo-deformación. Estas fibras son consideradas como barras esforzadas axialmente debido a fuerzas axiales aplicadas o producidas por los momentos flexionantes.



**Figura 1.2 Discontinuidad axial en las fibras de la sección del elemento viga (adaptado de Jukic 2013).**

Los programas computacionales empleados para el análisis no lineal de estructuras formadas por vigas y columnas, ofrecen al usuario alternativas para fines específicos, *e. g.* el programa DRAIN-2DX (Prakash *et al.* 1993), utiliza el método de fibras con comportamiento no lineal; este programa, al igual que el SAP (CSI-2005 2005), ETABS (CSI-2005 2005) y CANNY (Li 1996), contienen elementos resortes axiales y rotacionales con los que se pueden evaluar no-linealidades localizadas. Es posible asignar la superficie de falla en elementos sometidos a flexo-compresión a través del diagrama momento-carga axial en DRAIN-2DX, SAP y ETABS.

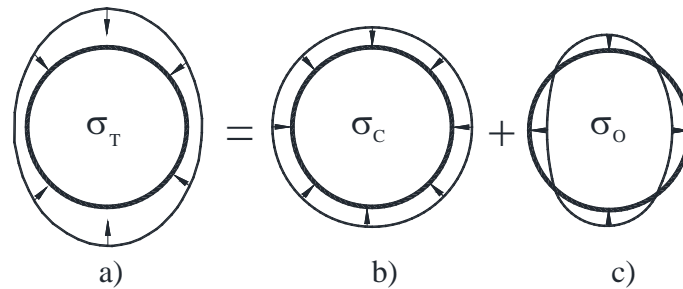
### 1.2.2 Daño y colapso en túneles

En el caso particular de túneles, las principales cargas de diseño se deben a las presiones en sitio por el peso del suelo, el nivel freático, las acciones sísmicas y las sobrecargas en la superficie. No obstante, debe señalarse que los efectos de cargas adicionales inducirían un estado de esfuerzos mayores a los considerados en el diseño, los cuales incrementan la ovalización en los anillos.

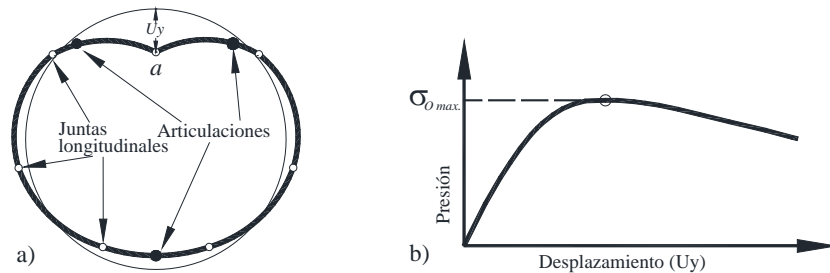
Blom (2002) enfatizó sobre los factores que produjeron daños en algunos túneles construidos en los Países Bajos. Sus procedimientos de cálculo se basaron en soluciones analíticas comparadas con resultados numéricos de modelos de elementos finitos. Además, Blom (2002) evaluó el estado límite último en relación con las fuerzas que actúan en el revestimiento, para lo cual consideró el efecto del pandeo y la formación del mecanismo de colapso ante el incremento de presiones de ovalización. El análisis de carga consistió en la



presión que induce el suelo sobre el túnel, la cual separó estratégicamente en dos partes, una representa la compresión uniforme ( $\sigma_c$ ) que naturalmente induce en el anillo esfuerzos en compresión, y la presión de ovalización ( $\sigma_o$ ), causante de los momentos flexionantes en el anillo, como se muestran respectivamente en la Figura 1.3. Posteriormente, determinó la secuencia de la formación de articulaciones aplicando incrementalmente la carga de ovalización, ocurriendo la primera articulación en el fondo del anillo y posteriormente, en forma simultánea, dos articulaciones en la parte superior como se muestran en la Figura 1.4a, la curva esquemática presión de ovalización contra desplazamiento en el punto  $a$  del anillo se muestra en la Figura 1.4b. Finalmente, comparó analítica y numéricamente los resultados de un experimento obtenidos por Blom y van Oosterhout (2001), que consistió en someter a presión de ovalización y fuerza axial a tres anillos formados por dovelas en la dirección longitudinal del túnel, hasta agrietar los elementos de concreto, en el que se evaluó el deslizamiento y compresión de los elementos de madera contrachapada que unía a los anillos, la rigidez de ovalización de los anillos, la rigidez rotacional de las juntas longitudinales y la influencia de la fuerza axial en la dirección longitudinal del túnel.



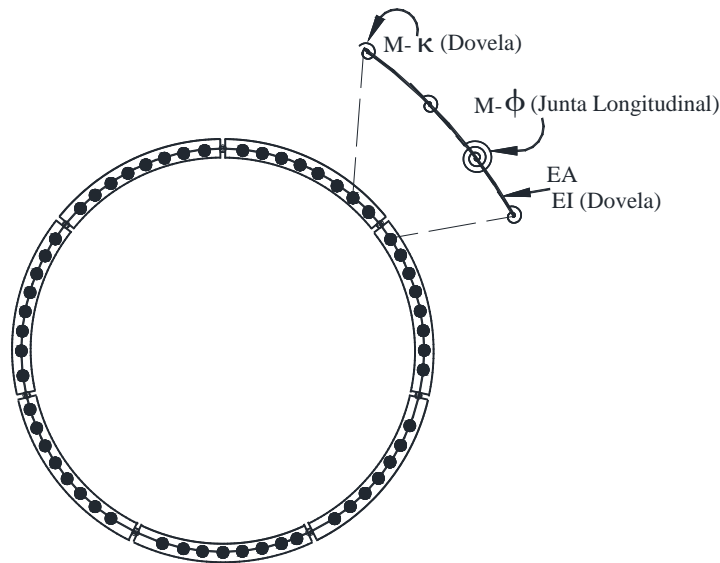
**Figura 1.3 Separación de la presión del suelo sobre el túnel: a) total, b) uniforme y c) ovalización (adaptado de Blom 2002).**



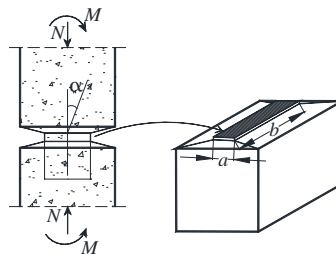
**Figura 1.4 a) formación de articulaciones y b) curva carga contra desplazamiento (adaptada de Blom 2010).**

El estudio del colapso en túneles fue ampliado por van der Waart van Gulik (2010), quién realizó un análisis paramétrico, en el cual varió los diámetros y espesores de las dovelas, con el propósito de determinar el parámetro crítico al aplicar la presión de ovalización

sobre el túnel. En dicho estudio se utilizaron elementos vigas elásticas para representar las dovelas, resortes rotacionales no-lineales, para analizar la formación de articulaciones, colocados en los extremos de los elementos vigas y también en las juntas longitudinales, como se muestra en la Figura 1.5. A los elementos resortes rotacionales les asignó el comportamiento constitutivo momento-rotación de la sección reforzada de la dovela, y a las juntas longitudinales les asignó el comportamiento constitutivo de las formulaciones desarrolladas por Jansen (1983), fundamentadas en los estudios experimentales en dos piezas de concreto realizados por Leonhardt y Reimann (1966), mostradas en la Figura 1.6. Una de las conclusiones de van der Waart van Gulik (2010) es que el parámetro importante que rige en el comportamiento de los túneles es el diámetro, puesto que a mayor diámetro, mayor desplazamiento en la parte superior del túnel ante la misma magnitud de cargas de ovalización.



**Figura 1.5 Discretización utilizada por van der Waart van Gulik (2010)**



**Figura 1.6 Junta ensayada por Leonhardt y Reimann (1966).**

Los modelos numéricos descritos anteriormente se realizaron mediante estrategias de modelado con elementos finitos con comportamiento elástico lineal y no-lineal del material; sin embargo, el modelado puede ser tedioso al tener que remover elementos y

sustituirlos por momentos plásticos o al incluir resortes innecesarios en las secciones de las vigas para modelar una posible articulación, lo cual también lo hace computacionalmente costoso.

### **1.3 Justificación**

El estudio del colapso en estructuras ha evolucionado tanto en su formulación teórica basada en energía, como en su aproximación numérica, aprovechando las facilidades computacionales existentes. En algunos casos, los métodos de solución consideran estrategias de modelado con elementos finitos, como la utilizada por van der Waart van Gulik (2010). En otros casos, la ocurrencia de articulaciones se analizan con formulaciones de elementos finitos vigas con discontinuidades embebidas, que consideran el daño como una discontinuidad en el campo de rotaciones o desplazamientos transversales (Armero y Erlich 2006, Juárez y Ayala 2012 y Jukic *et al.* 2013). En el primer caso, van der Waart van Gulik (2010), las soluciones son dependientes de la ubicación, dentro del modelo numérico, de los elementos que modelan la formación de articulaciones en la estructura en zonas de concentración de esfuerzos, como lo son la colocación de resortes con comportamiento no lineal. Esto implica el uso de elementos adicionales para garantizar la continuidad en la transferencia de fuerzas en toda la estructura, por lo que se puede obtener un modelo numérico mal condicionado. En otros casos, las soluciones se obtienen con elementos finitos con discontinuidades interiores, aplicados para casos específicos de falla por flexión o cortante, sin considerar el efecto axial. Además, los modelos constitutivos “momento-salto del giro” y “cortante-salto de desplazamiento transversal” sólo consideran el ablandamiento para concreto simple, pero no tienen un fundamento energético que delimite el área bajo sus respectivas curvas, más aún el caso de concreto reforzado. Para superar las limitantes antes expuestas, se plantea el objetivo de este trabajo en la siguiente sección.

### **1.4 Hipótesis de trabajo**

Las hipótesis consideradas para el desarrollo de este trabajo son:

- Las estructuras en estudio son analizadas en el plano.
- Las cargas aplicadas son monotónicas.
- La adherencia acero-concreto en los elementos estructurales de concreto reforzado se considera perfecta.
- Los elementos estructurales serán sin desperfectos de fabricación.
- En los modelos de túneles se considerará el efecto axial en el eje longitudinal, por lo cual los anillos serán modelados con la interacción de los anillos vecinos,

representada por el contacto entre paneles de madera laminada, que serán modelados con resortes axiales de comportamiento lineal.

- Las juntas longitudinales entre dovelas de los túneles, tendrán el comportamiento constitutivo con base en la formulación de Jansen (1983).
- El elemento viga-columna con discontinuidades se basan en funcionales de energía de vigas de Euler-Bernoulli y Timoshenko.
- Los modelos constitutivos para los tres elementos mecánicos: momento, cortante y fuerza axial se calibrarán con resultados de pruebas experimentales y teorías reportadas en la literatura.

## CAPÍTULO 2

### Elemento viga-columna con discontinuidades interiores

En este capítulo se presenta la formulación de elementos finitos viga-columna con discontinuidades interiores, primero para elementos barra y posteriormente para elementos vigas. El elemento barra tiene la capacidad de desarrollar discontinuidad axial, mientras que el elemento viga delgada (a flexión) desarrolla una discontinuidad de rotación y la viga gruesa que incluye deformaciones por cortante presenta discontinuidades en la rotación y/o en el desplazamiento transversal.

#### 2.1 Formulación del elemento barra con discontinuidades interiores

Considere el elemento mostrado en la Figura 2.1, que corresponde a una barra con longitud  $L$ , sección transversal  $A$  y módulo elástico  $E$ , la cual se sujeta a carga en ambos extremos donde se desarrollan los elementos mecánicos en fuerza axial  $n_1$  y  $n_2$  y los desplazamientos nodales  $d_1$  y  $d_2$ , hasta que ocurre una concentración de deformaciones en una zona  $S$ , donde se presenta una discontinuidad o salto  $\llbracket u \rrbracket$  en los desplazamientos axiales, tal que el dominio de la barra  $\Omega \subset [0, L]$ , queda dividido por la discontinuidad  $S$ , por lo tanto  $\Omega = \Omega^- + \Omega^+$ .

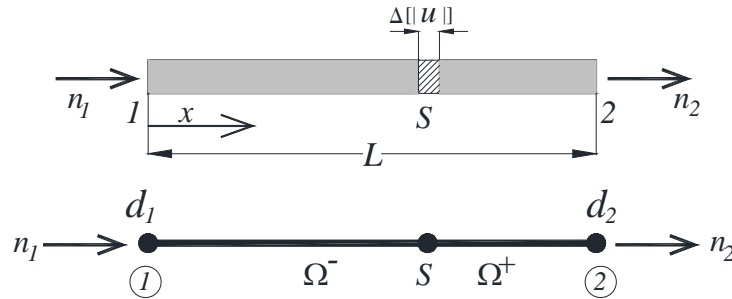


Figura 2.1 Elemento barra con discontinuidades interior.

##### 2.1.1 Funcional de energía

El funcional de energía del elemento barra, de acuerdo con Juárez (2006), mostrado en la Figura 2.1, depende del campo de desplazamientos del elemento  $u$ , y  $\llbracket u \rrbracket$  son los desplazamientos que sobrepasan el umbral elástico definidos como saltos o discontinuidades:

$$\Pi(u, \llbracket u \rrbracket) = \int_{\Omega} [W(\bar{\varepsilon}) - b \cdot u] d\Omega - F_i \cdot u_i + \int_0^{\llbracket u \rrbracket} T_s \cdot \llbracket u \rrbracket d\llbracket u \rrbracket \quad (2.1)$$

en el que  $W(\bar{\varepsilon}) = \int_0^{\bar{\varepsilon}} \sigma(\bar{\varepsilon}) d\bar{\varepsilon}$  es la energía de deformación del elemento,  $\bar{\varepsilon}$  es la deformación en el campo continuo,  $b \cdot u$  es el trabajo desarrollado por las fuerzas de cuerpo, que no será considerado en este trabajo,  $F_i \cdot u_i$  es el trabajo externo debido a las cargas concentradas y  $\int_0^{\llbracket u \rrbracket} T_s \cdot \llbracket u \rrbracket d\llbracket u \rrbracket$  es la energía en la discontinuidad.

El campo de desplazamientos se aproxima como:

$$u(\mathbf{x}) = N(\mathbf{x})d + M_s(\mathbf{x})\llbracket u \rrbracket \quad (2.2)$$

donde  $d$  son los desplazamientos en los nodos del elemento y  $N(\mathbf{x})$  contiene las funciones de forma estándar del elemento en un espacio geométrico, tal que:

$$N(\mathbf{x}) = [N_1 \quad N_2] \quad (2.3)$$

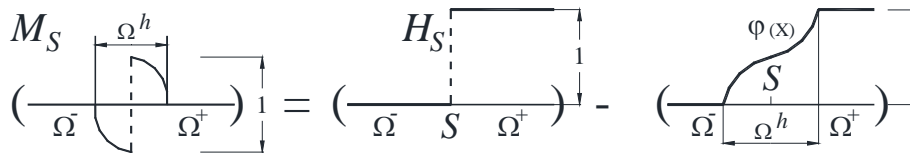
$$N_1(\mathbf{x}) = \frac{x_2 - x}{L}, N_2(\mathbf{x}) = \frac{x - x_1}{L}$$

La función  $M_s$ , mostrada en la Figura 2.2, que aproxima el salto de desplazamiento se define como:

$$M_s(\mathbf{x}) = H_s(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x}) \quad (2.4)$$

y puede interpretarse, de acuerdo a la ec. (2.2), como la función de forma  $N_c(x)$  en la discontinuidad  $S$ , en la que  $H_s(\mathbf{x})$  es la función salto de Heaviside y  $\varphi(\mathbf{x})$  es una función continua definida como  $\varphi(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{ne} N_i$ , donde  $N_i$  corresponden a las funciones de forma al lado derecho de la discontinuidad, tal que:

$$\begin{aligned} H_s(\mathbf{x}) &= 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega^- \quad \text{y} \quad \varphi(\mathbf{x}) = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega^- \\ H_s(\mathbf{x}) &= 1 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega^+ \quad \varphi(\mathbf{x}) = 1 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega^+ \end{aligned} \quad (2.5)$$



**Figura 2.2 Representación gráfica de la función  $M_S$**

Las deformaciones continuas se aproximan como:

$$\bar{\varepsilon}(\mathbf{x}) = B(\mathbf{x}) \cdot d + B_c(\mathbf{x}) \cdot \llbracket u \rrbracket \quad (2.6)$$

donde las derivadas de las funciones de forma definidas en las ecs. (2.3) y (2.5), respectivamente, son:

$$\begin{aligned} B(\mathbf{x}) &= \frac{1}{L} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \\ B_c(\mathbf{x}) &= -\frac{1}{L} \end{aligned} \quad (2.7)$$

Sustituyendo las ecs. (2.2) y (2.6) en la ecuación (2.1), se obtiene:

$$\begin{aligned} \Pi(d, \llbracket u \rrbracket) &= \int_{\Omega} \left[ C \left( d^T B^T + \llbracket u \rrbracket^T B_c^T \right) \cdot (Bd + B_c \llbracket u \rrbracket) - b \cdot \left( d^T N^T(x) + \llbracket u \rrbracket^T N_c^T \right) \right] \cdot d\Omega \\ &\quad - \left( d^T N^T(x) + \llbracket u \rrbracket^T N_c^T \right) F_i + \int_0^{\llbracket u \rrbracket} \int_0^{\llbracket u \rrbracket} T_s(\llbracket u \rrbracket) d\llbracket u \rrbracket \end{aligned} \quad (2.8)$$

donde  $C$  es la matriz de las constantes elásticas.

### 2.1.2 Minimización del funcional de energía

Para tener un valor mínimo del funcional dado en la ec. (2.8), se obtienen las derivadas respecto a  $d$  y  $\llbracket u \rrbracket$ , las cuales se igualan a cero; tal que:

$$\frac{\partial \Pi(d, \llbracket u \rrbracket)}{\partial d} = \int_{\Omega} C B^T (Bd + B_c \llbracket u \rrbracket) d\Omega - N^T(x) F_i = 0 \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial \Pi(d, \llbracket u \rrbracket)}{\partial \llbracket u \rrbracket} = \int_{\Omega} C B_c^T (Bd + B_c \llbracket u \rrbracket) d\Omega + \int_0^{\llbracket u \rrbracket} T_s \llbracket u \rrbracket d\llbracket u \rrbracket - N_c^T F_i = 0 \quad (2.10)$$

Puesto que las ecs. (2.9) y (2.10) contienen términos no lineales, estas ecuaciones se linealizan con series de Taylor, así:

$$\int_{\Omega} B^T C B \Delta d d\Omega + \int_{\Omega} B^T C B_c \Delta \llbracket u \rrbracket d\Omega + \int_{\Omega} B^T (Bd + B_c \llbracket u \rrbracket) d\Omega - F_i = 0 \quad (2.11)$$

$$\int_{\Omega} B_c^T C B \Delta d d\Omega + \int_{\Omega} B_c^T C B_c \Delta \llbracket u \rrbracket d\Omega + \int_{\Omega} B_c^T (Bd + B_c \llbracket u \rrbracket) d\Omega + T_s \llbracket u \rrbracket + \int_0^{\llbracket u \rrbracket} \frac{\partial T_s}{\partial \llbracket u \rrbracket} \Delta \llbracket u \rrbracket d\llbracket u \rrbracket = 0 \quad (2.12)$$

Agrupando los términos de las ecs. (2.11) y (2.12) se obtiene la matriz de rigideces siguiente:

$$\begin{bmatrix} \int_{\Omega} B^T C B \cdot dv & \int_{\Omega} B^T C B_C \cdot dv \\ \int_{\Omega} B_C^T C B \cdot dv & \int_{\Omega} B_C^T C B_C \cdot dv + \int_{\Gamma} C_N^T \cdot d\Gamma \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta d \\ \Delta \llbracket u \rrbracket \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta f_{ext} \\ \Delta f_{int} \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

Sustituyendo los términos de la ec. (2.7) en la ec. (2.13) se obtiene la siguiente matriz de rigideces de una barra con discontinuidades interiores:

$$\begin{bmatrix} \frac{AE}{L} & \frac{-AE}{L} & \frac{AE}{L} \\ \frac{-AE}{L} & \frac{AE}{L} & \frac{-AE}{L} \\ \frac{AE}{L} & \frac{-AE}{L} & \frac{AE}{L} + AC_N^T \end{bmatrix}^{(n-1)} \cdot \begin{Bmatrix} \Delta d_1 \\ \Delta d_2 \\ \Delta \llbracket u \rrbracket \end{Bmatrix}^{(n)} = \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_s \end{Bmatrix}^{(n-1)} \quad (2.14)$$

donde  $C_N^T = \frac{\partial T_s}{\partial \llbracket u \rrbracket}$  es el operador constitutivo tangente para la discontinuidad axial.

El vector de fuerzas residuales en los nodos y en la discontinuidad, para cada paso de carga  $n$  se define, respectivamente, como:

$$\begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{bmatrix}^{(n-1)} = \begin{bmatrix} F_{ext1} \\ F_{ext2} \end{bmatrix}^{(n)} - \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}^{(n-1)} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot \llbracket u \rrbracket^{(n-1)} \quad (2.15)$$

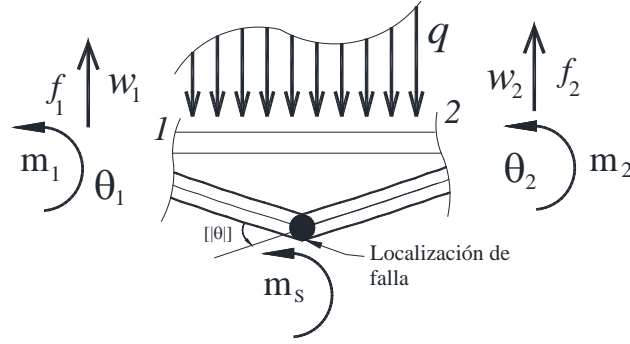
$$n_s^{(n-1)} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \llbracket u \rrbracket^{(n-1)} + AT_s \llbracket u \rrbracket^{(n-1)} \quad (2.16)$$

## 2.2 Formulación del elemento viga delgada con discontinuidades

En esta tesis se considerarán como vigas delgadas aquéllas cuya relación peralte entre longitud sea  $h/L \leq 0.2$  de acuerdo a (CSI-2005 2005), de otra forma se considerarán como vigas peraltadas. Las vigas delgadas incluirán en su formulación sólo la energía por flexión, mientras que las vigas gruesas incluirán, además, la energía por cortante.

En la Figura 2.3 se muestra un elemento con una carga distribuida  $q$ , momentos  $M$  y fuerzas transversales  $f$  en sus extremos. Las propiedades geométricas y mecánicas son la longitud  $L$ , momento de inercia  $I$  y módulo elástico  $E$ . Puesto que se trata de una viga delgada, no se consideran las deformaciones ni discontinuidades transversales por cortante, por lo cual en este tipo de viga sólo pueden ocurrir articulaciones debidas a discontinuidades en el campo de las rotaciones  $\llbracket \theta \rrbracket$ .





**Figura 2.3 Elemento viga delgada con discontinuidad en rotación.**

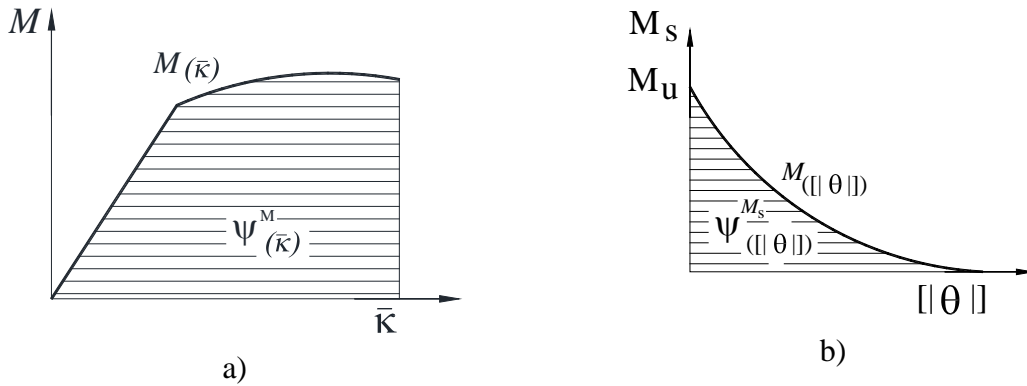
### 2.2.1 Funcional de energía

El funcional de energía, desarrollado por Juárez (2006) para la viga delgada con discontinuidades es:

$$\Pi(w, [[\theta]]) = \int_L (\psi^M(\bar{\kappa}^w) - q(x) \cdot w) dx + \int_S \psi^{Ms}([[\theta]]) ds - M^* \cdot \theta|_{\Gamma} - V^* \cdot w|_{\Gamma} \quad (2.17)$$

donde  $\psi^M$  corresponde a la densidad de energía a flexión, dependiente de la curvatura continua,  $\bar{\kappa}$ , como se muestra en la Figura 2.4a. La densidad de energía de deformación,  $\psi^{Ms}$ , liberada debido a la formación de una articulación depende del salto de las rotaciones  $[[\theta]]$ , como se muestra en la Figura 2.4b. La carga distribuida  $q(x)$  actúa sobre la viga, mientras que los momentos y los cortantes prescritos en los extremos son, respectivamente,  $M^*$  y  $V^*$ . La ec. (2.17) se puede reescribir como:

$$\Pi(w, [[\theta]]) = \int_L \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^2 w(x)}{\partial x^2} - \frac{\partial \varphi(x)[[\theta]]}{\partial x} \right]^T EI \left[ \frac{\partial^2 w(x)}{\partial x^2} - \frac{\partial \varphi(x)[[\theta]]}{\partial x} \right] dx - \int_L q(x)w(x)dx + \int_S M[[\theta]]dS - M^* \cdot \theta|_{\Gamma} - V^* \cdot w|_{\Gamma} \quad (2.18)$$



**Figura 2.4 Densidad de energía de deformación en: a) en la parte continua de la viga y b) en la zona de localización (adaptado de Juárez y Ayala 2009)**

El campo de desplazamientos regulares  $w(x)$ , se interpola como:

$$w(x) = N(x)d \quad (2.19)$$

donde  $d$  es el vector de rotaciones y desplazamientos en los nodos, y  $N(x)$  corresponden a las funciones de forma de interpolación, que en el caso de vigas Euler-Bernoulli son:

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{L^3}(2x^3 - 3Lx^2 + L^3) \\ N_2 &= \frac{1}{L^3}(x^3L - 2x^2 - 2x^2L^2 + L^3x) \\ N_3 &= \frac{1}{L^3}(3Lx^2 - 2x^2) \\ N_4 &= \frac{1}{L^3}(Lx^3 - L^2x^2) \end{aligned} \quad (2.20)$$

Sustituyendo la ec. (2.19) en la ec. (2.18) se obtiene:

$$\begin{aligned} \Pi(d, [\theta]) &= \int_0^L \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^2 N(x)d}{\partial x^2} - \frac{\partial \varphi(x)[\theta]}{\partial x} \right]^T EI \left[ \frac{\partial^2 N(x)d}{\partial x^2} - \frac{\partial \varphi(x)[\theta]}{\partial x} \right] dx \\ &\quad - \int_0^L d^T N^T q(x) dx + \int_s \int_0^{[\theta]} M [\theta] d [\theta] dS - M^* \cdot N(x)d \Big|_{\Gamma} - V^* \cdot N(x)d \Big|_{\Gamma} \end{aligned} \quad (2.21)$$

La función lineal  $\varphi(x)$  está dada por:

$$\varphi_{(x)} = \frac{x}{L} \quad (2.22)$$

Aproximando los desplazamientos de la ecs. (2.19) con las ecs. (2.20) y (2.22) se obtienen las matrices  $B(x)$  y  $B_c$ , respectivamente, como:

$$\frac{\partial^2 N(x)}{\partial x^2} = B(x) = \frac{1}{L^3} \begin{bmatrix} 12x - 6L & 6xL - 4L^2 & -12x + 6L & 6xL - 2L^2 \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = B_c = \frac{1}{L} \quad (2.24)$$

Sustituyendo las ecs. (2.23) y (2.24) en la ec. (2.21) se obtiene:

$$\begin{aligned} \Pi(d, [\theta]) &= \int_0^L \frac{1}{2} [B(x)d - B_c [\theta]]^T EI [B(x)d - B_c [\theta]] dx - \int_0^L d^T N^T(x) q(x) dx \\ &\quad + \int_s \int_0^{[\theta]} M ([\theta]) d [\theta] dS - d^T N(x)^T \cdot M^* \Big|_{\Gamma} - d^T N(x)^T \cdot V^* \Big|_{\Gamma} \end{aligned} \quad (2.25)$$

### 2.2.2 Minimización del funcional

Diferenciando la ec. (2.25) respecto a  $d$  y  $[\theta]$  e igualando a cero para garantizar un valor extremo se tiene:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Pi(d, [\theta])}{\partial d} &= \int_0^L B(x)^T EI [B(x)d - B_c [\theta]] dx - \int_0^L N^T q(x) dx - M^* - V^* = 0 \\ \frac{\partial \Pi(d, [\theta])}{\partial [\theta]} &= - \int_0^L B_c^T EI [B(x)d - B_c [\theta]] dx + \int_s \frac{\partial}{\partial [\theta]} \left( \int_0^{[\theta]} M([\theta]) d[\theta] \right) ds = 0\end{aligned}\quad (2.26)$$

Puesto que el momento en la discontinuidad  $M([\theta])$  es no lineal en la ec. (2.26) se utilizan las series de Taylor para linealizar, así:

$$\begin{aligned}\int_0^L B(x)^T EIB(x) \Delta d \cdot dx - \int_0^L B(x)^T EIB_c \Delta [\theta] \cdot dx + \int_0^L B(x)^T \sigma(B(x)d - B_c [\theta]) \cdot dx - F_{ext} &= 0 \\ \int_0^L B_c^T EIB(x) \Delta d \cdot dx - \int_0^L B_c^T EIB_c \Delta [\theta] + \int_0^L B_c^T \sigma(B(x)d - B_c [\theta]) dx + M([\theta]) + IC_b^T \Delta [\theta] &= 0\end{aligned}\quad (2.27)$$

donde  $C_b^T = \frac{\partial M([\theta])}{\partial [\theta]}$ , es el operador constitutivo tangente del momento-salto rotación. Los dos primeros términos de cada línea de la ec. (2.27) representan las rigideces del elemento y, los términos restantes representan los residuos de fuerzas y momentos.

La ecuación de equilibrio del elemento de la ec. (2.27) es:

$$\begin{bmatrix} \int_0^L B(x)^T EIB(x) dx & \int_0^L B(x)^T EIB_c dx \\ B_c^T EIB(x) dx & \int_0^L B_c^T EIB_c dx + C_b^T I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta d \\ \Delta [\theta] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_a \\ f_i \end{bmatrix}\quad (2.28)$$

donde los términos del vector de fuerzas y momentos son:

$$\begin{aligned}f_a &= F_{ext} - \int_0^L B(x)^T EI (B(x)d - B_c [\theta]) dx \\ f_i &= 0 - \int_0^L B_c^T EI ((B(x)d - B_c [\theta])) dx - M([\theta])\end{aligned}\quad (2.29)$$

### 2.2.3 Matriz de rigideces y vector de fuerzas

Sustituyendo las ecs. (2.23) y (2.24) en la ec. (2.28) e integrando, se obtiene la matriz de rigideces del elemento viga delgada con la discontinuidad embebida en la rotación:

$$\begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & \frac{EI}{L} \\ -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & -\frac{EI}{L} \\ 0 & \frac{EI}{L} & 0 & -\frac{EI}{L} & \frac{EI}{L} + IC_b^T \end{bmatrix}^{(n-1)} \begin{bmatrix} \Delta w_1 \\ \Delta \theta_1 \\ \Delta w_2 \\ \Delta \theta_2 \\ \Delta \llbracket \theta \rrbracket \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} f_1 \\ m_1 \\ f_2 \\ m_2 \\ m_s \end{bmatrix}^{n-1} \quad (2.30)$$

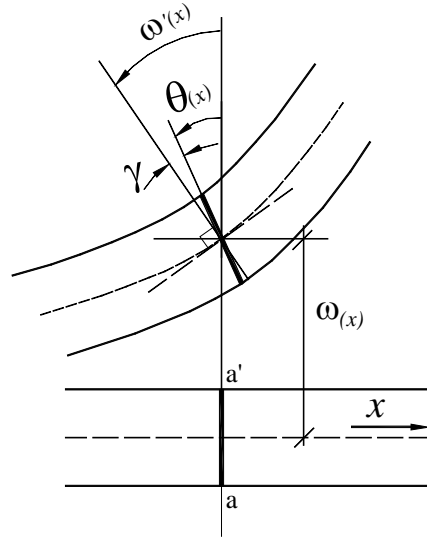
Donde los términos del vector de los residuos para cada incremento de desplazamiento o carga  $n$  son:

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ m_1 \\ f_2 \\ m_2 \end{bmatrix}^{(n-1)} = \begin{bmatrix} f_{1ext} \\ M_{1ext} \\ f_{2ext} \\ M_{2ext} \end{bmatrix}^{(n)} - \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & 6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix}^{(n-1)} + \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \llbracket \theta \rrbracket^{n-1} \quad (2.31)$$

$$m_s^{(n-1)} = -\frac{EI}{L} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix}^{(n-1)} + \frac{EI}{L} \llbracket \theta \rrbracket - M_{(\llbracket \theta \rrbracket)}^{n-1} \quad (2.32)$$

### 2.3 Formulación de viga gruesa con discontinuidades

Las vigas gruesas, a diferencia de las vigas delgadas, consideran la deformación por cortante, por lo cual la rotación de la sección transversal no es ortogonal al eje de la viga debido a que la parte superior e inferior se encuentran alejados del eje neutro, como se muestra en la Figura 2.5.



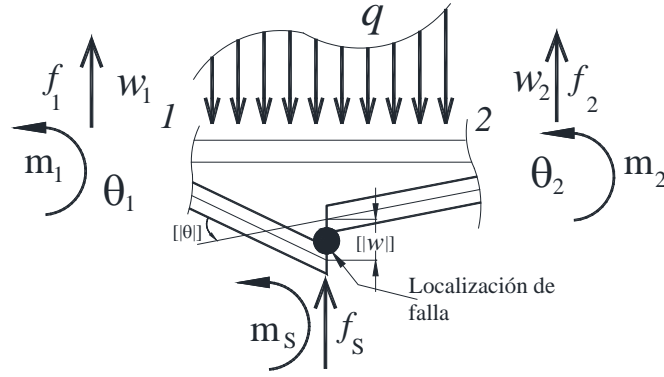
**Figura 2.5 Cinemática de las vigas gruesas**

En las vigas gruesas, el cambio de posición de las partículas localizadas en dirección vertical en la línea  $a-a'$  no se mantienen perpendiculares al eje neutro, como se muestra en la Figura 2.5, sino que sólo rotan un ángulo  $\theta$ . La derivada del desplazamiento transversal está formado por el giro  $\theta$ , y la deformación por cortante  $\gamma$ , tal que:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \theta + \gamma \quad (2.33)$$

### 2.3.1 Funcional de energía

El desplazamiento transversal y los giros son independientes en vigas gruesas, Juárez (2006), por lo que este elemento puede presentar saltos en el desplazamiento transversal  $\llbracket w \rrbracket$  y en la rotación  $\llbracket \theta \rrbracket$ , como se muestra en la Figura 2.6. En vigas gruesas las propiedades mecánicas y geométricas son: el módulo elástico  $E$ , momento de inercia  $I$ , longitud  $L$  y sección transversal de área efectiva a cortante  $A_s$ .



**Figura 2.6 Elemento viga de gruesa con discontinuidad en desplazamiento transversal y rotación.**

El funcional de energía del elemento viga de Timoshenko, desarrollado por Juárez (2006), es:

$$\Pi(w, \theta, [[w]], [[\theta]]) = \int_L \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x} \right)^T EI \left( \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} - \bar{\theta} \right)^T \alpha \left( \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} - \bar{\theta} \right) + qw \right] dx + \int_{\Gamma} M_S([[ \theta ]]) d\Gamma + \int_{\Gamma} V_S([[ w ]]) d\Gamma \quad (2.34)$$

en la que  $v_S$  y  $M_S$  son el cortante y momento en la zona de la discontinuidad, respectivamente,  $\bar{w}$  y  $\bar{\theta}$  son los desplazamientos y rotaciones continuas que se aproximan como:

$$\begin{aligned} \bar{\theta}(x) &= \theta(x) - \varphi(x) \cdot [[\theta]] \\ \bar{w}(x) &= w(x) - \varphi(x) \cdot [[w]] \end{aligned} \quad (2.35)$$

Puesto que los campos de rotación y desplazamientos son independientes, éstos se aproximan respectivamente como:

$$\begin{aligned} \theta(x) &= N_{\theta}(x) \cdot \theta \\ w(x) &= N_w(x) \cdot w \end{aligned} \quad (2.36)$$

Sustituyendo la ec. (2.36) en la ec. (2.35) se tiene:

$$\begin{aligned} \bar{\theta}(x) &= N_{\theta}(x) \cdot \theta - \varphi(x) \cdot [[\theta]] \\ \bar{w}(x) &= N_w(x) \cdot w - \varphi(x) \cdot [[w]] \end{aligned} \quad (2.37)$$

Sustituyendo la ec. (2.37) en la ec. (2.34) se obtiene:

$$\begin{aligned} \Pi(w, \theta, \llbracket w \rrbracket, \llbracket \theta \rrbracket) = & \int_0^L \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial(N_\theta(x) \cdot \theta - \varphi(x) \cdot \llbracket \theta \rrbracket)}{\partial x} \right]^T EI \left[ \frac{\partial(N_\theta(x) \cdot \theta - \varphi(x) \cdot \llbracket \theta \rrbracket)}{\partial x} \right] dx - \int_0^L (N_w(x) \cdot w)^T q dx \\ & + \int_0^L \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial(N_w(x) \cdot w - \varphi(x) \cdot \llbracket w \rrbracket)}{\partial x} - (N_\theta(x) \cdot \theta - \varphi(x) \cdot \llbracket \theta \rrbracket) \right]^T \alpha \left[ \frac{\partial(N_w(x) \cdot w - \varphi(x) \cdot \llbracket w \rrbracket)}{\partial x} - (N_\theta(x) \cdot \theta - \varphi(x) \cdot \llbracket \theta \rrbracket) \right] dx \\ & + \int_\Gamma M_s(\llbracket \theta \rrbracket) d\Gamma + \int_\Gamma V_s(\llbracket w \rrbracket) d\Gamma \end{aligned} \quad (2.38)$$

Las funciones de forma  $N$ , la función lineal  $\varphi(x)$ , las matrices  $B$  y  $B_C$  se definen en la ecuación (2.39). El término  $\alpha = A_s G_s$ , es la rigidez a cortante, en la que  $A_s$  y  $G_s$  son el área efectiva y el módulo a cortante, respectivamente.

$$\begin{aligned} N_w = N_\theta &= [N_1 \quad N_2], B_\theta = B_w = B = \frac{\partial N}{\partial x} \\ N_1 &= \frac{L-x}{L}, N_2 = \frac{x}{L} \\ \varphi(x) &= \frac{x}{L} \\ B &= \frac{1}{L} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \\ B_C &= \frac{-1}{L} \end{aligned} \quad (2.39)$$

### 2.3.2 Extremización del funcional

Para obtener un valor extremo del funcional, la ec. (2.38) se deriva respecto a cada variable independiente y se iguala a cero. Así se obtiene:

$$\frac{\partial \Pi(w, \theta, \llbracket w \rrbracket, \llbracket \theta \rrbracket)}{\partial w} = \int_0^L \frac{\partial N_w^T}{\partial x} \alpha \left[ \frac{\partial(N_w - \varphi(x) \llbracket \theta \rrbracket)}{\partial x} - N_\theta \theta + \varphi(x) \llbracket \theta \rrbracket \right] dx - \int_0^L N^T q dx = 0 \quad (2.40)$$

$$\frac{\partial \Pi(w, \theta, \llbracket w \rrbracket, \llbracket \theta \rrbracket)}{\partial \theta} = \int_0^L \frac{\partial N_\theta^T}{\partial x} EI \left( \frac{\partial N_\theta \theta - \varphi(x) \llbracket \theta \rrbracket}{\partial x} \right) dx - \int_0^L N_\theta^T \alpha \left[ \frac{\partial(N_w w - \varphi(x) \llbracket w \rrbracket)}{\partial x} - N_\theta \theta + \varphi(x) \llbracket \theta \rrbracket \right] dx = 0 \quad (2.41)$$

$$\frac{\partial \Pi(w, \theta, \llbracket w \rrbracket, \llbracket \theta \rrbracket)}{\partial \llbracket w \rrbracket} = \int_0^L -\frac{\partial \varphi(x)^T}{\partial x} \alpha \left( \frac{\partial(N_w w - \varphi(x) \llbracket w \rrbracket)}{\partial x} - N \theta + \varphi \llbracket \theta \rrbracket \right) dx + \int_0^{\llbracket w \rrbracket} V_s(\llbracket w \rrbracket) d\llbracket w \rrbracket = 0 \quad (2.42)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi(w, \theta, \llbracket w \rrbracket, \llbracket \theta \rrbracket)}{\partial \llbracket \theta \rrbracket} &= \int_0^L -\frac{\partial \varphi(x)^T}{\partial x} EI \left[ \frac{\partial (N_\theta \theta - \varphi(x) \llbracket \theta \rrbracket)}{\partial x} \right] + \int_0^L \varphi^T \alpha \left[ \frac{\partial (N_w w - \varphi(x) \llbracket w \rrbracket)}{\partial x} - N\theta + \varphi \llbracket \theta \rrbracket \right] dx \\ &+ \int_0^{\llbracket \theta \rrbracket} M(\llbracket \theta \rrbracket) d\llbracket \theta \rrbracket = 0 \end{aligned} \quad (2.43)$$

Sustituyendo los términos correspondientes de la ec. (2.39) en las ecs. (2.40) a (2.43), se tiene:

$$\int_0^L B^T \alpha [Bw - B_c \llbracket w \rrbracket - N_\theta \theta + \varphi(x) \llbracket \theta \rrbracket] dx - \int_0^L N^T q dx = 0 \quad (2.44)$$

$$\int_0^L B^T EI (B\theta - B_c \llbracket \theta \rrbracket) - \int_0^L N^T \alpha (Bw - B_c \llbracket w \rrbracket - N\theta + \varphi \llbracket \theta \rrbracket) dx = 0 \quad (2.45)$$

$$\int_0^L -B_c^T \alpha (Bw - B_c \llbracket w \rrbracket - N\theta + \varphi \llbracket \theta \rrbracket) dx + \int_0^{\llbracket w \rrbracket} V_s(\llbracket w \rrbracket) d\llbracket w \rrbracket = 0 \quad (2.46)$$

$$\int_0^L -B_c^T EI (B\theta - B_c \llbracket \theta \rrbracket) + \int_0^L \varphi^T \alpha [Bw - B_c \llbracket w \rrbracket - N\theta + \varphi \llbracket \theta \rrbracket] dx + \int_0^{\llbracket \theta \rrbracket} M(\llbracket \theta \rrbracket) d\llbracket \theta \rrbracket = 0 \quad (2.47)$$

Puesto que el cortante  $V_s \llbracket w \rrbracket$ , y el momento  $M_s \llbracket \theta \rrbracket$ , son no-lineales, las ecs. (2.44) a (2.47) se linealizan mediante series de Taylor, respecto a cada variable independiente, tal que:

$$\begin{aligned} &\int_0^L B^T \alpha B \Delta w \cdot dx - \int_0^L B^T \alpha B_c \llbracket \Delta w \rrbracket \cdot dx - \int_0^L B^T \alpha N \Delta \theta \cdot dx + \int_0^L B^T \alpha \varphi \Delta \llbracket \theta \rrbracket dx \\ &+ \int_0^L B^T [Bw - B_c \llbracket w \rrbracket - N_\theta \theta + B_c \llbracket \theta \rrbracket] dx - F_{ext} = 0 \end{aligned} \quad (2.48)$$

$$\begin{aligned} &-\int_0^L N^T \alpha B \Delta w \cdot dx + \left[ \int_0^L N^T \alpha N \cdot dx + \int_0^L B^T EIB \cdot dx \right] \Delta \theta + \int_0^L N^T \alpha B_c \Delta \llbracket w \rrbracket \\ &-\left[ \int_0^L N^T \alpha \varphi dx + \int_0^L B^T EIB_c dx \right] \Delta \llbracket \theta \rrbracket - \int_0^L B^T (B\theta - B_c \llbracket \theta \rrbracket) - \int_0^L N^T (Bw - B_c \llbracket w \rrbracket - N\theta + \varphi \llbracket \theta \rrbracket) dx = 0 \end{aligned} \quad (2.49)$$

$$\begin{aligned} &-\int_0^L B_c^T \alpha B \Delta w \cdot dx + \int_0^L B_c^T \alpha B_c \Delta \llbracket w \rrbracket \cdot dx + \int_0^L B_c \alpha N \Delta \theta - \int_0^L B_c^T \alpha \varphi \Delta \llbracket \theta \rrbracket dx \\ &-\int_0^L B_c^T (Bw - B_c \llbracket w \rrbracket - N\theta + \varphi \llbracket \theta \rrbracket) dx + \int_0^{\llbracket w \rrbracket} V_s(\llbracket w \rrbracket) d\llbracket w \rrbracket + A_s C_s^T \Delta \llbracket w \rrbracket = 0 \end{aligned} \quad (2.50)$$

$$\begin{aligned} &\int_0^L \varphi^T \alpha B \Delta w \cdot dx - \int_0^L \varphi^T \alpha B_c \Delta \llbracket w \rrbracket - \left[ \int_0^L B_c^T EIB \cdot dx + \int_0^L \varphi^T \alpha N \cdot dx \right] \Delta \theta \\ &+ \left[ \int_0^L B_c^T EIB_c dx + \int_0^L \varphi^T \alpha \varphi \cdot dx \right] \Delta \llbracket \theta \rrbracket - \int_0^L B_c^T (B\theta - B_c \llbracket \theta \rrbracket) dx + \int_0^L \varphi^T [Bw - B_c \llbracket w \rrbracket - N\theta + \varphi \llbracket \theta \rrbracket] dx \\ &\int_0^{\llbracket \theta \rrbracket} M(\llbracket \theta \rrbracket) d\llbracket \theta \rrbracket + IC_b^T \Delta \llbracket \theta \rrbracket = 0 \end{aligned} \quad (2.51)$$



### 2.3.3 Matrices de rigideces

Las ecs. (2.48) a (2.51) representan el equilibrio del elemento viga gruesa con discontinuidades interiores, las cuales se ordenan para representarse matricialmente como:

$$\begin{bmatrix} \int_0^L B^T \alpha B \cdot dx & -\int_0^L B^T \alpha N \cdot dx & -\int_0^L B^T \alpha B_c \cdot dx & \int_0^L B^T \alpha \varphi(x) \cdot dx \\ -\int_0^L N^T \alpha B \cdot dx & \left[ \int_0^L N^T \alpha N \cdot dx + \int_0^L B^T EI B \cdot dx \right] & \int_0^L N^T \alpha B_c \cdot dx & \left[ -\int_0^L N^T \alpha \varphi(x) \cdot dx - \int_0^L B^T EI B_c \cdot dx \right] \\ -\int_0^L B_c^T \alpha B \cdot dx & \int_0^L B_c^T \alpha N \cdot dx & \int_0^L B_c \alpha B_c \cdot dx & -\int_0^L B_c^T \alpha \varphi(x) \cdot dx \\ \int_0^L \varphi(x)^T \alpha B \cdot dx & -\left[ \int_0^L B_c^T EI B \cdot dx + \int_0^L \varphi(x)^T \alpha N \cdot dx \right] & -\int_0^L \varphi(x)^T \alpha B_c \cdot dx & \left[ \int_0^L B_c^T EI B_c \cdot dx + \int_0^L \varphi(x)^T \alpha \varphi(x) \cdot dx \right] \end{bmatrix}^{(n-1)} \begin{bmatrix} \Delta w \\ \Delta \theta \\ \Delta [w] \\ \Delta [\theta] \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} f \\ m \\ f_s \\ m_s \end{bmatrix}^{(n-1)} \quad (2.52)$$

donde

$$\begin{aligned} f &= F_{ext} - \int_0^L B^T (Bw - B_c [w] - N\theta + \varphi(x) [\theta]) dx \\ m &= 0 + \int_0^L N^T (Bw - B_c [w] - N\theta + \varphi(x) [\theta]) dx - \int_0^L B^T (B\theta - B_c [\theta]) dx \\ f_s &= 0 + \int_0^L B_c^T (Bw - B_c [w] - N\theta + \varphi(x) [\theta]) dx - \int_0^{[w]} V [w] d[w] \\ m_s &= 0 + \int_0^L B_c^T (B\theta - B_c [\theta]) dx - \int_0^L \varphi(x)^T (Bw - B_c [w] - N\theta + \varphi(x) [\theta]) dx - \int_0^{[\theta]} M [\theta] d[\theta] \end{aligned} \quad (2.53)$$

Sustituyendo los términos de la ec. (2.39) en las ecs. (2.52) y (2.53), se obtiene la matriz de rigideces del elemento vigas gruesas con discontinuidades interiores.

$$\begin{bmatrix} \frac{\alpha}{L} & -\frac{\alpha}{L} & \frac{\alpha}{2} & -\frac{\alpha}{2} & \frac{\alpha}{L} & -\frac{\alpha}{2} \\ -\frac{\alpha}{L} & \frac{\alpha}{L} & \frac{\alpha}{2} & -\frac{\alpha}{2} & -\frac{\alpha}{L} & \frac{\alpha}{2} \\ \frac{\alpha}{2} & \frac{\alpha}{2} & \frac{EI}{L} + \frac{\alpha L}{3} & -\frac{EI}{L} + \frac{\alpha L}{6} & \frac{\alpha}{2} & \frac{EI}{L} - \frac{\alpha L}{6} \\ -\frac{\alpha}{2} & -\frac{\alpha}{2} & -\frac{EI}{L} + \frac{\alpha L}{6} & \frac{EI}{L} + \frac{\alpha L}{3} & \frac{\alpha}{2} & \frac{EI}{L} - \frac{\alpha L}{3} \\ \frac{\alpha}{L} & -\frac{\alpha}{L} & \frac{\alpha}{2} & \frac{\alpha}{2} & \frac{\alpha}{L} + A_s C_s^T & -\frac{\alpha}{2} \\ -\frac{\alpha}{2} & \frac{\alpha}{2} & \frac{EI}{L} - \frac{\alpha L}{6} & \frac{EI}{L} + \frac{\alpha L}{3} & -\frac{\alpha}{2} & \frac{EI}{L} + \frac{\alpha L}{3} + IC_b^T \end{bmatrix}^{(n-1)} \begin{bmatrix} \Delta w_1 \\ \Delta w_2 \\ \Delta \theta_1 \\ \Delta \theta_2 \\ [w] \\ [\theta] \end{bmatrix}^{(n)} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ m_1 \\ m_2 \\ f_s \\ m_s \end{bmatrix}^{(n-1)} \quad (2.54)$$

donde los residuos de fuerzas en cada incremento de carga o desplazamiento  $n$  son:

$$\begin{aligned}
 \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix}^{(n-1)} &= \begin{bmatrix} F_{ext1} \\ F_{ext2} \end{bmatrix}^{(n)} - \begin{bmatrix} \frac{\alpha}{L} & -\frac{\alpha}{L} \\ -\frac{\alpha}{L} & \frac{\alpha}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{Bmatrix}^{(n-1)} + \begin{bmatrix} -\frac{\alpha}{2} \\ \frac{\alpha}{2} \end{bmatrix} \llbracket w \rrbracket^{n-1} + \begin{bmatrix} \frac{\alpha}{2} & -\frac{\alpha}{2} \\ -\frac{\alpha}{2} & \frac{\alpha}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}^{(n-1)} - \begin{bmatrix} -\frac{\alpha}{2} \\ \frac{\alpha}{2} \end{bmatrix} \llbracket \theta \rrbracket^{n-1} \\
 \begin{Bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{Bmatrix} &= 0 + \begin{bmatrix} -\frac{\alpha}{L} & \frac{\alpha}{L} \\ -\frac{\alpha}{L} & \frac{\alpha}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{Bmatrix}^{(n-1)} - \begin{bmatrix} \left(\frac{\alpha L}{3} + \frac{EI}{L}\right) & \left(\frac{\alpha L}{6} - \frac{EI}{L}\right) \\ \left(\frac{\alpha L}{6} - \frac{EI}{L}\right) & \left(\frac{\alpha L}{3} + \frac{EI}{L}\right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}^{(n-1)} - \begin{bmatrix} -\frac{\alpha}{2} \\ \frac{\alpha}{2} \end{bmatrix} \llbracket w \rrbracket^{n-1} + \begin{bmatrix} \frac{\alpha L}{6} \\ \frac{\alpha L}{3} \end{bmatrix} \llbracket \theta \rrbracket^{n-1} \\
 f_s^{(n-1)} &= 0 + \begin{bmatrix} -\frac{\alpha}{L} & \frac{\alpha}{L} \\ -\frac{\alpha}{L} & \frac{\alpha}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{Bmatrix}^{(n-1)} - \begin{bmatrix} \frac{\alpha}{2} & \frac{\alpha}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}^{(n-1)} - \begin{bmatrix} \frac{\alpha}{L} \\ \frac{\alpha}{2} \end{bmatrix} \llbracket w \rrbracket^{n-1} + \begin{bmatrix} \frac{\alpha}{2} \end{bmatrix} \llbracket \theta \rrbracket^{n-1} - V_{(\llbracket w \rrbracket)}^{n-1} \\
 m_s^{(n-1)} &= 0 + \begin{bmatrix} \frac{\alpha}{2} & -\frac{\alpha}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{Bmatrix}^{(n-1)} + \begin{bmatrix} \left(\frac{\alpha L}{6} - \frac{EI}{L}\right) & \left(\frac{\alpha L}{3} + \frac{EI}{L}\right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}^{(n-1)} + \begin{bmatrix} \frac{\alpha}{2} \end{bmatrix} \llbracket w \rrbracket^{n-1} - \begin{bmatrix} \frac{\alpha L}{3} + \frac{EI}{L} \end{bmatrix} \llbracket \theta \rrbracket^{n-1} - M_{(\llbracket \theta \rrbracket)}^{n-1}
 \end{aligned}
 \tag{2.55}$$

donde  $C_s^T = \frac{\partial V_{\llbracket w \rrbracket}}{\partial \llbracket w \rrbracket}$  y  $C_b^T = \frac{\partial M_{\llbracket \theta \rrbracket}}{\partial \llbracket \theta \rrbracket}$  son los operadores tangente en el salto del desplazamiento transversal y rotacional, respectivamente.

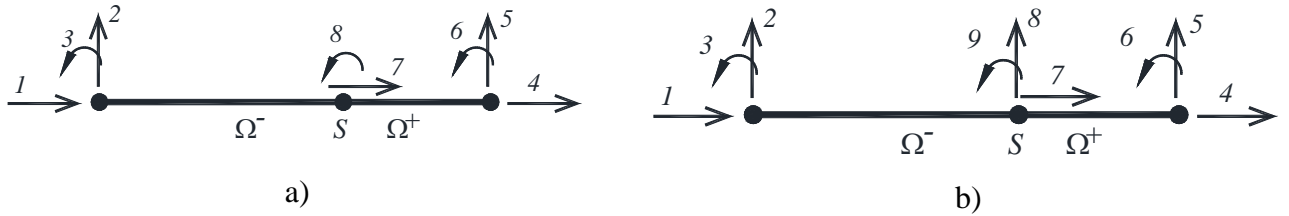
## 2.4 Acoplamiento de los elementos barra y viga con discontinuidades interiores

El elemento viga-columna delgada con discontinuidades interiores se obtiene acoplando los términos de la matriz de rigideces del elemento finito barra de la ec. (2.14) con el elemento viga delgada de la ec. (2.30) y, de igual forma, para obtener el elemento viga-columna gruesa se acopla la ec. (2.14) en la ec. (2.54), los cuales se muestran respectivamente como:

$$\begin{bmatrix} \frac{AE}{L} & 0 & 0 & -\frac{AE}{L} & 0 & 0 & \frac{AE}{L} & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & \frac{EI}{L} \\ -\frac{AE}{L} & 0 & 0 & \frac{AE}{L} & 0 & 0 & -\frac{AE}{L} & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{EI}{L} \\ \frac{AE}{L} & 0 & 0 & -\frac{AE}{L} & 0 & 0 & \frac{AE}{L} + AC_N^T & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EI}{L} & 0 & 0 & -\frac{EI}{L} & 0 & \frac{EI}{L} + IC_b^T \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \Delta d_1 \\ \Delta w_1 \\ \Delta \theta_1 \\ \Delta d_2 \\ \Delta w_2 \\ \Delta \theta_2 \\ \Delta \llbracket u \rrbracket \\ \Delta \llbracket \theta \rrbracket \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} n_1 \\ f_1 \\ m_1 \\ n_2 \\ f_2 \\ m_2 \\ n_s \\ m_s \end{Bmatrix} \tag{2.56}$$

$$\begin{bmatrix}
 \frac{AE}{L} & 0 & 0 & -\frac{AE}{L} & 0 & 0 & \frac{AE}{L} & 0 & 0 \\
 0 & \frac{\alpha}{L} & \frac{\alpha}{2} & 0 & -\frac{\alpha}{L} & -\frac{\alpha}{2} & 0 & \frac{\alpha}{L} & -\frac{\alpha}{2} \\
 0 & \frac{\alpha}{2} & \frac{EI}{L} + \frac{\alpha L}{3} & 0 & \frac{\alpha}{2} & -\frac{EI}{L} + \frac{\alpha L}{6} & 0 & \frac{\alpha}{2} & \frac{EI}{L} - \frac{\alpha L}{6} \\
 -\frac{AE}{L} & 0 & 0 & \frac{AE}{L} & 0 & 0 & -\frac{AE}{L} & 0 & 0 \\
 0 & -\frac{\alpha}{L} & \frac{\alpha}{2} & 0 & \frac{\alpha}{L} & -\frac{\alpha}{2} & 0 & -\frac{\alpha}{L} & \frac{\alpha}{2} \\
 0 & -\frac{\alpha}{2} & -\frac{EI}{L} + \frac{\alpha L}{6} & 0 & -\frac{\alpha}{2} & \frac{EI}{L} + \frac{\alpha L}{3} & 0 & \frac{\alpha}{2} & \frac{EI}{L} - \frac{\alpha L}{3} \\
 \frac{AE}{L} & 0 & 0 & -\frac{AE}{L} & 0 & 0 & \frac{AE}{L} + AC_N^T & 0 & 0 \\
 0 & \frac{\alpha}{L} & \frac{\alpha}{2} & 0 & -\frac{\alpha}{L} & \frac{\alpha}{2} & 0 & \frac{\alpha}{L} + A_S C_S^T & -\frac{\alpha}{2} \\
 0 & -\frac{\alpha}{2} & \frac{EI}{L} - \frac{\alpha L}{6} & 0 & \frac{\alpha}{2} & -\frac{EI}{L} + \frac{\alpha L}{3} & 0 & -\frac{\alpha}{2} & \frac{EI}{L} + \frac{\alpha L}{3} + IC_b^T
 \end{bmatrix}
 \begin{Bmatrix}
 \Delta d_1 \\
 \Delta w_1 \\
 \Delta \theta_1 \\
 \Delta d_2 \\
 \Delta w_2 \\
 \Delta \theta_2 \\
 \Delta[u] \\
 \Delta[w] \\
 \Delta[\theta]
 \end{Bmatrix}
 =
 \begin{Bmatrix}
 n_1 \\
 f_1 \\
 m_1 \\
 n_2 \\
 f_2 \\
 m_2 \\
 n_s \\
 f_s \\
 m_s
 \end{Bmatrix}
 \quad (2.57)$$

Es de interés mencionar que en las ecs. (2.56) y (2.57) las acciones axiales son independientes de las rotaciones o desplazamientos transversales, los grados de libertad están enumerados como se muestran en la Figura 2.7.



**Figura 2.7 Grados de libertad en vigas con discontinuidades: a) delgadas y b) gruesas**

### 2.4.1 Condensación de matrices

Es conveniente obtener una matriz de rigideces reducida en función de los desplazamientos y saltos en las discontinuidades, con la cual se obtendría el vector de fuerzas residuales, y con ello reducir el peso computacional.

Las ecs. (2.56) y (2.57) se expresan como:

$$\begin{bmatrix}
 K_{ee} & K_{e[s]} \\
 K_{[s]e} & K_{[s][s]}
 \end{bmatrix}
 \begin{Bmatrix}
 \Delta d_e \\
 \Delta[S]
 \end{Bmatrix}
 =
 \begin{Bmatrix}
 F_n \\
 R_{[s]}
 \end{Bmatrix}
 \quad (2.58)$$

donde  $K_{ee}$ ,  $K_{e[s]}$ ,  $K_{[s]e}$  y  $K_{[s][s]}$  son las submatrices asociadas a los grados de libertad incluyendo la discontinuidad del elemento.  $F_n$  y  $R_{[s]}$  son los vectores de fuerzas y momentos nodales y en la discontinuidad, respectivamente.  $\Delta d_e$  son los incrementos de desplazamientos en los nodos y  $\Delta [s]$  los saltos en la discontinuidad.

La ec. (2.58) se puede reescribir de acuerdo con Tena (2007), como:

$$F_n = K_{ee}\Delta d_e + K_{e[s]}\Delta [s] \quad (2.59)$$

$$R_{[s]} = K_{[s]e}\Delta d_e + K_{[s][s]}\Delta [s] \quad (2.60)$$

de la ec. (2.60) se obtiene:

$$\Delta [s] = K_{[s][s]}^{-1}R_{[s]} - K_{[s][s]}^{-1}K_{[s]e}\Delta d_e \quad (2.61)$$

sustituyendo la ec. (2.61) en la ec. (2.59) se tiene:

$$\left[ K_{ee} - K_{e[s]}K_{[s][s]}^{-1}K_{[s]e} \right] \left[ \Delta d_e \right] = \left[ F_n - K_{e[s]}K_{[s][s]}^{-1}R_{[s]} \right] \quad (2.62)$$

que se representa como:

$$[K_\Delta] \{ \Delta d \} = [R^*] \quad (2.63)$$

la matriz condensada de rigideces se define como:

$$[K_\Delta] = \left[ K_{ee} - K_{e[s]}K_{[s][s]}^{-1}K_{[s]e} \right] \quad (2.64)$$

en la cual el vector condensado de las fuerzas residuales es:

$$[R^*] = \left[ F_n - K_{e[s]}K_{[s][s]}^{-1}R_{[s]} \right] \quad (2.65)$$

# **CAPÍTULO 3**

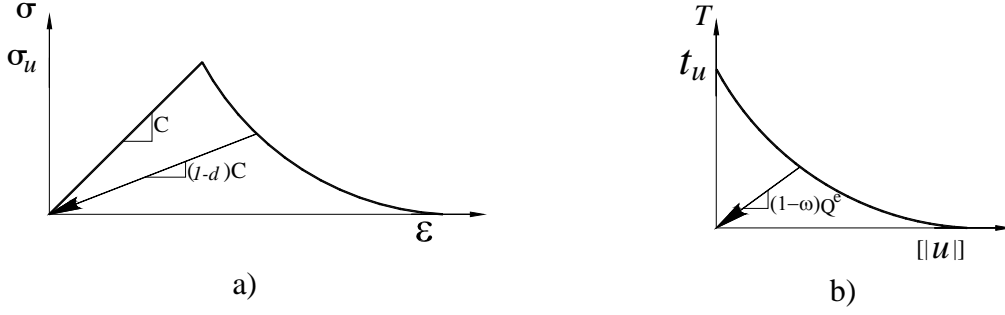
## **Modelos constitutivos**

---

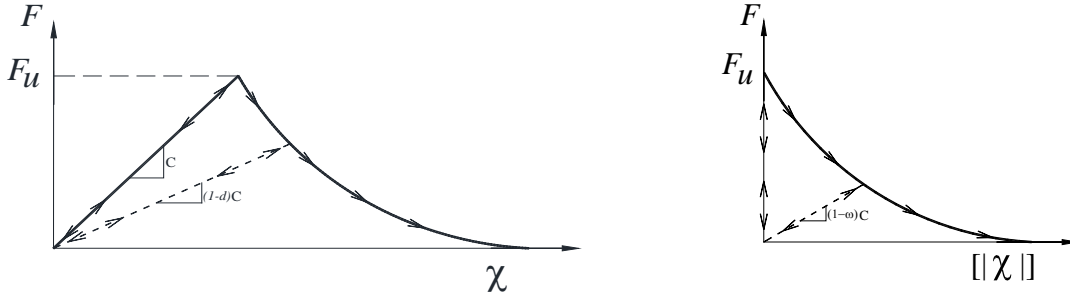
En este capítulo se definen los modelos constitutivos de daño para momento, fuerza normal y cortante, implantados para el elemento finito viga-columna definido en el capítulo 2, en los que se utiliza un modelo basado en la mecánica de daño continuo y discreto. Las curvas del comportamiento constitutivo para momentos y fuerzas consideran elementos prismáticos de concreto reforzado con acero, en los que se utilizan formulaciones analíticas obtenidas de la teoría de análisis y diseño del concreto reforzado. Además, se utilizan resultados de pruebas experimentales reportadas en la literatura, como es el caso del comportamiento a cortante de secciones reforzadas, el cortante en la interfaz entre superficies de concreto y el comportamiento momento-curvatura en la junta longitudinal que une los elementos de concreto en los túneles dovelados. Se formulan las funciones de ablandamiento y criterios de daño del comportamiento constitutivo para cada fuerza y momento flexionante.

### **3.1 Modelo de daño**

Las propiedades mecánicas son características inherentes a los materiales, cuyo comportamiento idealizado se representa mediante modelos constitutivos. Los modelos constitutivos de daño se utilizan para representar la evolución del agrietamiento interno de los materiales tipo cerámico que se interpreta como un deterioro de las propiedades mecánicas del material cuando se alcanza una superficie de falla, debidas a las acciones que actúan sobre las estructuras. Los modelos de daño en sólidos se clasifican como continuo, en el cual se considera que el deterioro se encuentra distribuido en el elemento finito, que generalmente utiliza variables de esfuerzo contra deformaciones para describir el comportamiento, como se muestra en la Figura 3.1a, y el modelo de daño discreto, que considera que el deterioro se desarrolla en una línea o superficie dentro de los elementos dañados, Figura 3.1b, que generalmente utiliza variables de tracción contra salto de desplazamiento para describir el comportamiento. Análogos a estos modelos, se pueden desarrollar modelos constitutivos en función de fuerzas contra desplazamientos o momentos contra giros, como se muestra en la Figura 3.2, donde se tienen los casos continuo y discreto.



**Figura 3.1 Modelo de daño para elementos sólidos: a) continuo y b) discreto**



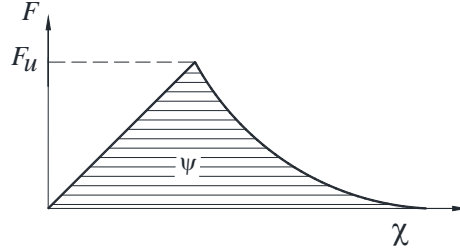
**Figura 3.2 Modelo de daño: a) continuo b) discreto.**

Un modelo de daño isotrópico continuo para elementos viga formulado por Juárez y Ayala (2012) se define como:

Densidad de energía libre	$\psi(\chi, r) = (1 - D(r))\psi_o$	
Ecuación constitutiva	$F = \frac{\partial \psi(\chi, r)}{\partial \chi} = (1 - D)C : \chi$	
Variable de daño	$D(r) = 1 - \frac{q}{r}; \quad d \in [0, 1]; \quad q \in [0, r_o]$	
Evolución de daño	$\dot{r}_{(t)} = \gamma \begin{cases} r \in [r_o, \infty] \\ r_o = r \Big _{t=0} = \frac{F_u}{\sqrt{C}} \end{cases}$	(3.1)
Criterio de daño	$f(\tau_F, q) = \tau_F - q = \sqrt{F : C^{-1} : F} - q; \quad \begin{cases} q \in [0, r_o] \\ q _{t=0} = r_o \end{cases}$	
Regla de ablandamiento	$\dot{q} = H^d(r)\dot{r}; \quad H^d(r) = q'(r) \leq 0$	
Condición de carga o descarga	$f(\tau_F, q) < 0; \quad \gamma \geq 0; \quad \gamma f(\tau_F, q) = 0$	
Consistencia	$\gamma \dot{f}(\tau_F, q) = 0$	

En la que  $\psi$  es la densidad de energía libre, representada por el área bajo la curva del modelo constitutivo, como se muestra en la Figura 3.3,  $\chi$  representa el vector de desplazamientos,  $r$  es la variable interna de evolución del daño,  $C$  son las constantes

elásticas,  $F$  el vector de fuerzas,  $D$  es la variable de daño que depende de la variable de ablandamiento  $q$ ,  $H$  es el parámetro de ablandamiento,  $\gamma$  es el multiplicador de daño que determina la condición de carga o descarga. La función  $f(\tau_f, q)$  limita la superficie de falla del material, en el espacio de fuerzas.



**Figura 3.3 Representación de la energía libre.**

El modelo de daño discreto para elementos viga es:

Energía libre discreta	$\psi(\llbracket u \rrbracket, \bar{\alpha}) = (1 - \omega)\psi_0(\llbracket u \rrbracket), \begin{cases} \psi_0(\llbracket u \rrbracket) = \int_0^{\llbracket u \rrbracket} T(\llbracket u \rrbracket) d\llbracket u \rrbracket \end{cases}$	
Ecuación constitutiva	$F = \frac{\partial \psi(\llbracket u \rrbracket, \bar{\alpha})}{\partial \llbracket u \rrbracket} = (1 - \omega)C\llbracket u \rrbracket$	
Variable de daño	$\omega = 1 - \frac{\bar{q}(\bar{\alpha})}{\bar{\alpha}}; \quad \omega \in [-\infty, 1]$	(3.2)
Ley de evolución del daño	$\dot{\bar{\alpha}} = \bar{\lambda} = \frac{\partial}{\partial t}(\bar{\alpha}); \quad \bar{\alpha} \in (0, \infty)$	
Criterio de daño	$f(T, \bar{q}) = \tau_T - \bar{q}; \quad \tau_T = \ F\ (C)^{-1} = \sqrt{F[C]^{-1}F}$	
Regla de ablandamiento	$\dot{\bar{q}}(\bar{\alpha}) = \bar{H}\dot{\bar{\alpha}}; \quad \bar{H} = \bar{q}'(\bar{\alpha}) \leq 0$	
Condición de carga-descarga	$f \leq 0; \quad \bar{\lambda} \geq 0; \quad \bar{\lambda}f = 0$	
Consistencia	$\bar{\lambda}\dot{f} = 0$	

donde  $\omega$  es la variable de daño definida en términos de la variable de ablandamiento  $\bar{q}$ ;  $\llbracket u \rrbracket$  es el vector de saltos o discontinuidades de los desplazamientos,  $\bar{\alpha}$  es la variable interna de la evolución del daño, el resto de las variables se definen de igual forma que las del modelo de daño continuo pero con el término discreto, e.g.,  $\bar{H}$  es el parámetro de ablandamiento discreto.

La razón de cambio de fuerzas entre los desplazamientos se define como un operador constitutivo tangente de un modelo continuo,  $C^T$ , y la razón de cambio de fuerzas entre los saltos de desplazamientos corresponde al operador constitutivo discreto del modelo discreto  $C_d^T$ , como se definen, respectivamente, en las ecuaciones siguientes:

$$\begin{aligned}
C^T &= \frac{\partial F}{\partial \chi} \\
C_d^T &= \frac{\partial F}{\partial \llbracket \chi \rrbracket}
\end{aligned}
\tag{3.3}$$

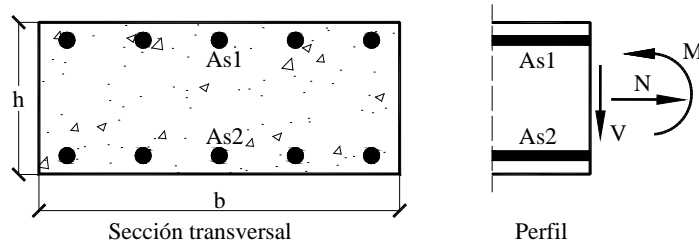
Cuando un elemento se encuentra en la condición de carga, en intervalo no lineal, los operadores constitutivos tangentes se calculan con la ec. (3.4), y para el intervalo elástico o condición de descarga, con la ec.(3.5).

$$\begin{aligned}
C^T &= (1-D)C - \frac{q-Hr}{r^3} (C : \chi \otimes \chi : C) \\
C_d^T &= (1-\omega)C - \frac{\bar{q}-H\bar{\alpha}}{\bar{\alpha}^3} (C \cdot \llbracket u \rrbracket \otimes \llbracket u \rrbracket \cdot C)
\end{aligned}
\tag{3.4}$$

$$\begin{aligned}
C^T &= (1-D)C \\
C_d^T &= (1-\omega)C
\end{aligned}
\tag{3.5}$$

### 3.2 Momento-curvatura

Considérese una sección transversal rectangular de concreto, reforzada con un área de acero en la parte superior,  $A_{s1}$ , e inferior,  $A_{s2}$ , como se muestra en la Figura 3.4 cuyo comportamiento constitutivo momento-curvatura se muestra en la Figura 3.5. En esta curva se definen cuatro puntos notables, de acuerdo con Aguilar y Barbat (1997), quienes se basaron en el modelo de Park *et. al.* (1982), que se explican a continuación: el punto A se obtiene cuando el concreto alcanza el esfuerzo máximo a tensión; en Y, el acero a tensión alcanza el esfuerzo de fluencia  $f_y$ , en el punto U el concreto desarrolla la deformación última en compresión  $\varepsilon_{uc}$  donde se obtiene el momento último  $M_u$ . Finalmente el punto F se determina con la deformación última del acero a tensión  $\varepsilon_{su}$  con el cual se define el módulo de ablandamiento negativo.

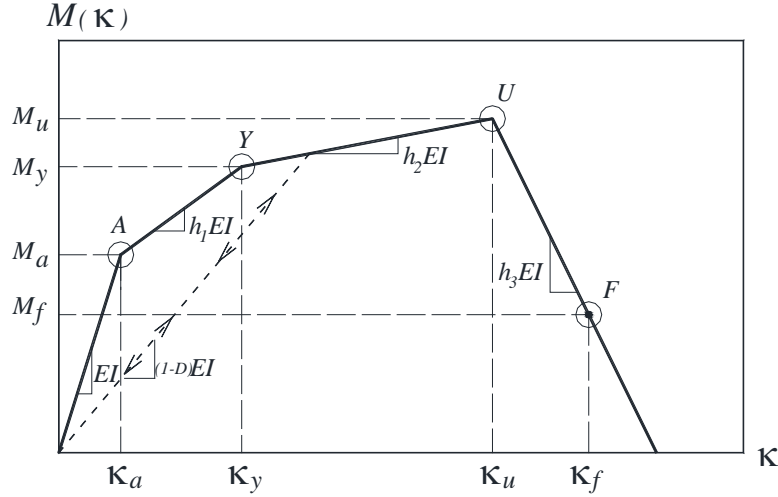


**Figura 3.4 Sección de concreto reforzada.**

Los módulos de ablandamientos en una curva momento,  $M$ , contra curvatura,  $\kappa$ , se definen como:



$$\begin{aligned}
 h_{1m} &= \frac{(M_y - M_a)}{EI(\kappa_y - \kappa_a)} \\
 h_{2m} &= \frac{(M_u - M_y)}{EI(\kappa_u - \kappa_y)} \\
 h_{3m} &= \frac{(M_f - M_u)}{EI(\kappa_f - \kappa_u)}
 \end{aligned}
 \tag{3.6}$$

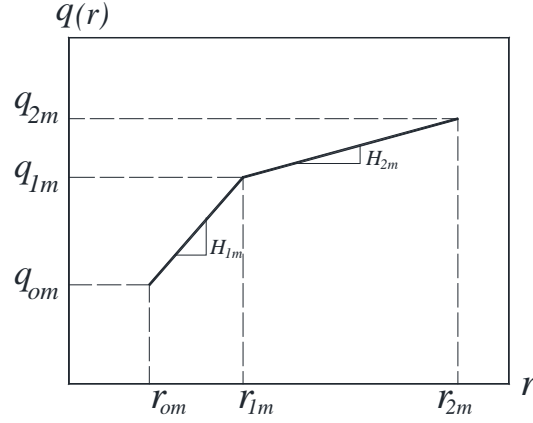


**Figura 3.5 Modelo constitutivo momento-curvatura.**

La ec. (3.7) representa la pendiente secante del momento del modelo de daño mostrado en la Figura 3.5, como:

$$M = (1 - D)EI\kappa \tag{3.7}$$

La función de ablandamiento con pendiente positiva  $q(r)$ , se muestra en la Figura 3.6, la cual se extiende desde el límite elástico  $M_a$ , donde inicia el daño, hasta el límite máximo de capacidad del elemento  $M_u$ . En esta región, aun cuando existe daño, el elemento aporta capacidad y se implanta el modelo de daño continuo, donde se considera que el daño acumulado en este intervalo se distribuye en todo el elemento.



**Figura 3.6 Función de ablandamiento  $q(r)$**

y se define como:

$$q_{(r)} = \begin{cases} q_{om} + H_{1m} (r - r_o); & r_{om} < r \leq r_{1m} \\ q_{1m} + H_{2m} (r - r_1); & r_{1m} < r \leq r_{2m} \end{cases} \quad (3.8)$$

donde  $H_{im}$  es el parámetro de ablandamiento en el espacio  $q$ - $r$  de cada intervalo mostrado, de acuerdo al anexo 1:

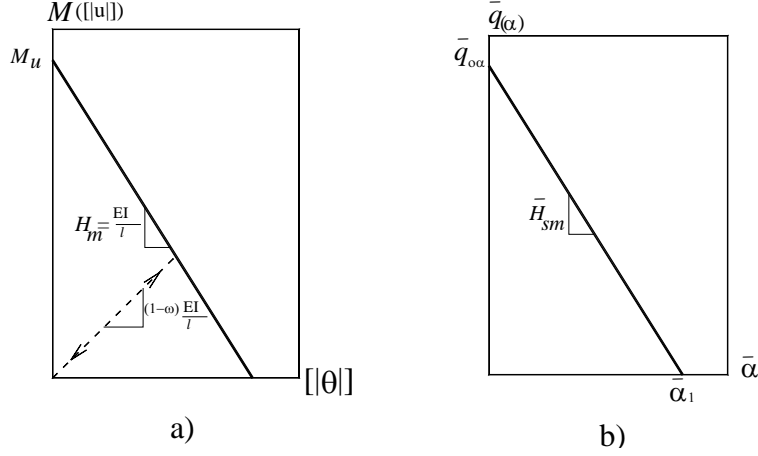
$$\begin{aligned} q_{om} &= r_{om} = \frac{M_a}{\sqrt{EI}} \\ q_{1m} &= r_{1m} = \frac{M_y}{\sqrt{EI}} \\ q_{2m} &= r_{2m} = \frac{M_u}{\sqrt{EI}} \\ r_{om} &= q_{om} \\ r_{1m} &= r_{om} + \frac{(q_{1m} - q_{om})}{H_{1m}} \\ r_{2m} &= r_{1m} + \frac{(q_{2m} - q_{1m})}{H_{2m}} \end{aligned} \quad (3.9)$$

La función de daño dependiente del momento es:

$$f(M, q) = \sqrt{M(EI)^{-1}M} - q(r) \quad (3.10)$$

En el intervalo de ablandamiento con pendiente negativa, el elemento no proporciona capacidad adicional de carga, por el contrario, al incrementarse las rotaciones, ésta se pierde hasta que es nula, por lo cual se consideran estos incrementos de rotaciones como

saltos de discontinuidad en la zona de localización del elemento y se implementa el modelo de daño discreto que se muestra en la Figura 3.7a, donde  $H_m$  es el parámetro de ablandamiento y  $\bar{H}_{sm}$  es el parámetro de ablandamiento discreto.



**Figura 3.7 Ablandamiento negativo: a) momento-salto b) función de ablandamiento discreto.**

donde

$$M = (1 - w) \frac{EI}{l} [\theta] \quad (3.11)$$

donde  $l$  es la longitud del elemento finito, por lo cual es dependiente del tamaño de la malla de discretización, y se define la función de ablandamiento discreto como:

$$\bar{q}(\alpha) = \bar{q}_{o\alpha} + \bar{H}_{sm} \bar{\alpha} \quad (3.12)$$

$$q_{o\alpha} = \frac{M_u}{\sqrt{\frac{EI}{l}}} \quad (3.13)$$

$$\alpha_1 = \frac{q_{o\alpha}}{\bar{H}_{sm}}$$

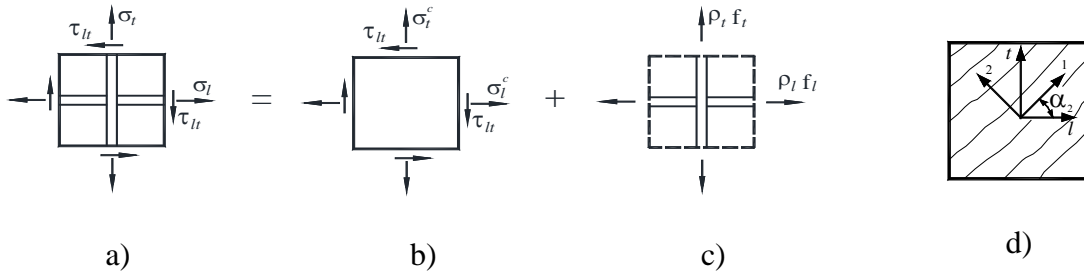
y la función del criterio de daño es:

$$f(M, q) = \frac{\|M\|}{\sqrt{\frac{EI}{l}}} - q(\alpha) \quad (3.14)$$

### 3.3 Cortante-deformación por cortante

#### 3.3.1 Elemento con refuerzo transversal

El comportamiento constitutivo cortante contra deformación por cortante,  $V-\gamma$ , de un elemento viga-columna de concreto con refuerzo transversal, es de acuerdo con el modelo FA-STM, acrónimo de su nombre en el idioma inglés, *Fixed Angle Softened Truss Model*, desarrollado por Pang y Hsu (1996), para elementos de concreto reforzado y validado mediante pruebas de laboratorio realizadas en la Universidad de Houston, Estados Unidos. Se eligió este modelo, debido a que representa el comportamiento constitutivo completo desde el intervalo elástico hasta la degradación o ablandamiento negativo, en el cual se considera el daño por cortante desacoplado a la flexión y fuerzas axiales. En este modelo se considera un elemento de concreto reforzado con acero bajo un estado de esfuerzos normales y cortantes, como se muestra en la Figura 3.8a. Los esfuerzos en el concreto y acero que se utilizan para el método de la armadura se muestran respectivamente en las Figura 3.8 b y c. La Figura 3.8d muestra la dirección del agrietamiento,  $\alpha_2$ , así como la dirección de los ejes principales.



**Figura 3.8 Representación de la membrana (adaptada de Pang y Hsu 1996): a) membrana reforzada, b) representación del esfuerzo en el concreto, c) esfuerzos en el acero y d) dirección de los ejes principales.**

La ec. (3.15) representa el comportamiento constitutivo esfuerzo cortante,  $\tau$ , contra la deformación,  $\gamma$ , con una curva como se muestra en la Figura 3.9a.

$$\tau_{12}^c = \tau_{12m}^c \left[ 1 - \left( 1 - \frac{\gamma_{12}}{\gamma_{12o}} \right)^6 \right] \quad (3.15)$$

donde  $\gamma_{12o} = -0.04\varepsilon_{1o}\beta$ ;  $\varepsilon_{1o}$  es la deformación máxima en la dirección principal y  $\beta$  es el ángulo desviador. El esfuerzo cortante máximo se calcula como:

$$\tau_{12m}^c = \frac{1}{2} \left[ (\sigma_l - \rho_l f_{ly}') - (\sigma_t - \rho_t f_{ty}') \right] \sin 2\alpha_2 + \tau_{lt} \cos 2\alpha_2 \quad (3.16)$$

y se simplifica cuando  $\alpha_2 = 45^\circ$ , como:

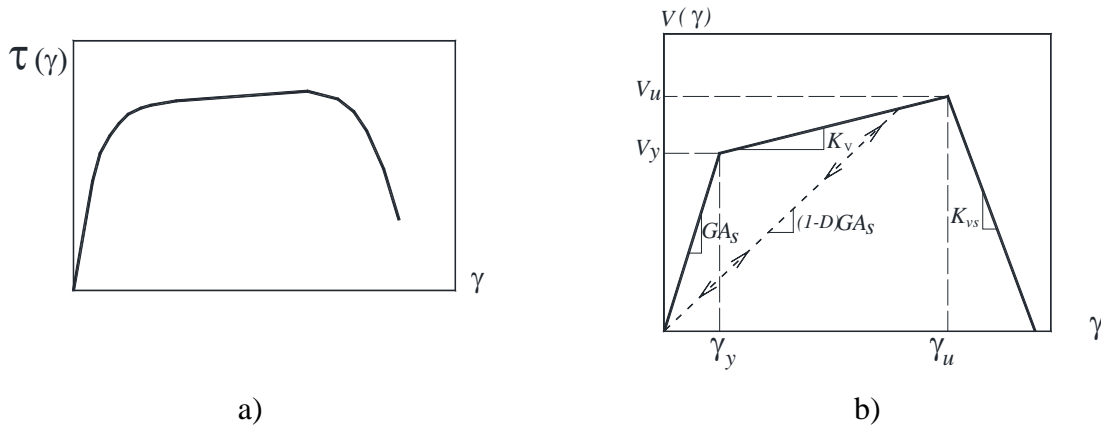
$$\tau_{12m}^c = \frac{1}{2}(-\rho_l f_{ly}' + \rho_t f_{ty}') \quad (3.17)$$

donde  $f_{ly}'$  y  $f_{ty}'$  es el esfuerzo de fluencia del acero longitudinal y transversal respectivamente, del elemento reforzado mostrado en la Figura 3.8a.

La curva mostrada en la Figura 3.9a se idealiza en este trabajo mediante el comportamiento constitutivo  $V$  contra  $\gamma$ , como se muestra en la Figura 3.9b, en la cual  $V$  está en función del módulo de rigidez  $G$ , y el área efectiva a cortante,  $A_s$ . Esta curva se obtiene con la ec. (3.15); sin embargo, el valor de cortante  $V_y$ , se aproxima a la capacidad de un elemento de concreto reforzado como:

$$V = V_c + V_s \quad (3.18)$$

donde  $V_c$  y  $V_s$  es la capacidad a cortante del concreto y del acero, respectivamente. El cortante último  $V_u$  corresponde a la deformación última del concreto.



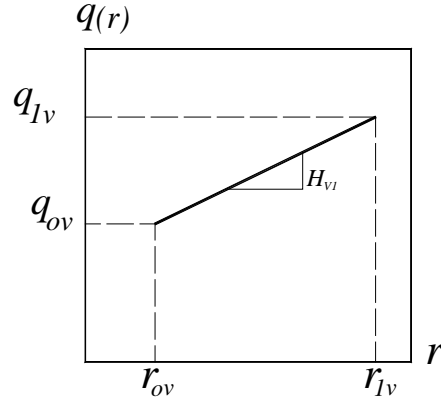
**Figura 3.9 Curva: a) esfuerzo cortante-deformación (adaptada de Pang y Hsu 1996) y b) cortante-deformación.**

Los dos primeros módulos,  $GA_s$  y  $h_1GA_s$ , son semejantes a los propuestos por Park y Paulay (1978) para el comportamiento bilineal a cortante de una sección de concreto con refuerzo transversal. El módulo  $h_2GA_s$  representa la rigidez en el intervalo donde el acero transversal alcanza la deformación última. Como se mencionó en el caso del comportamiento constitutivo momento-curvatura, en el intervalo de ablandamiento positivo el elemento ofrece capacidad a cortante y se considera el daño por cortante distribuido en él, por lo cual se utiliza el modelo de daño continuo en esa región.

El cortante se determina con la rigidez secante mediante:

$$V = (1-D)A_sG\gamma \quad (3.19)$$

La función de ablandamiento,  $q(r)$ , se muestra en la Figura 3.10,



**Figura 3.10 Función de ablandamiento daño continuo continuo.**

y se define como:

$$q(r) = q_0 + H_{V1}(r - r_{0v}); \quad r_{ov} < r \leq r_{lv} \quad (3.20)$$

donde  $H_{v1}$  se define en el anexo 1, y:

$$\begin{aligned} q_{ov} &= r_{ov} = \frac{V_y}{\sqrt{GA_s}} \\ q_{lv} &= r_{lv} = \frac{V_u}{\sqrt{GA_s}} \\ r_{0v} &= q_{0v} \\ r_{lv} &= r_{ov} + \frac{(q_{lv} - q_{0v})}{H_{V1}} \end{aligned} \quad (3.21)$$

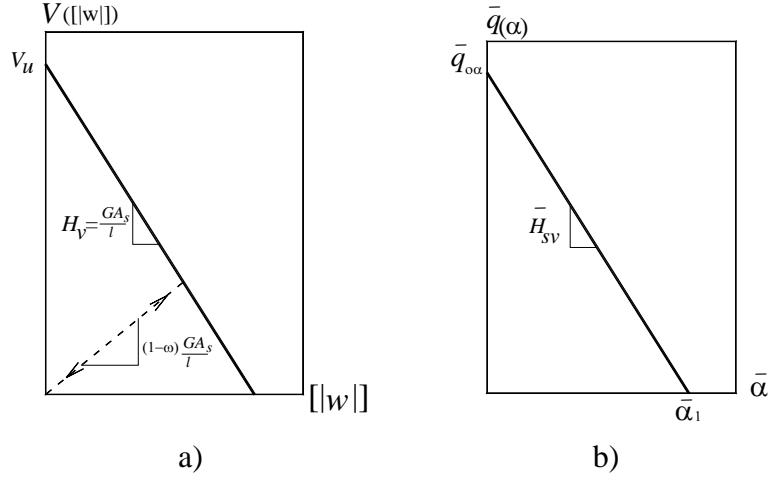
La función del criterio de daño es:

$$f(V, q) = \sqrt{V(AG_s)^{-1}V} - q(r) \quad (3.22)$$

Cuando la deformación por cortante alcanza el valor  $\gamma_u$ , el elemento desarrolla su capacidad última  $V_u$ , y ante deformaciones mayores esta decrece y se presentan saltos en desplazamientos transversales, debido a que se desarrollan zonas de localización, por lo cual se utiliza el modelo de daño discreto mostrado en la Figura 3.11a, donde  $H_v$  es el módulo de ablandamiento y  $\bar{H}_v$  es módulo de ablandamiento discreto.

El cortante en este intervalo se calcula como:

$$V = (1 - w) \frac{GA_s}{l} \llbracket w \rrbracket \quad (3.23)$$



**Figura 3.11 Curva: a) cortante-salto desplazamiento transversal, b) función de ablandamiento.**

La función de ablandamiento discreto por cortante, de acuerdo con la Figura 3.11b es:

$$\bar{q}(\alpha) = \bar{q}_{o\alpha} + \bar{H}_{sv} \bar{\alpha} \quad (3.24)$$

donde

$$\begin{aligned} q_{o\alpha} &= \frac{V_u}{\sqrt{\frac{AG_s}{l}}} \\ \alpha_1 &= \frac{q_{o\alpha}}{\bar{H}_{sv}} \end{aligned} \quad (3.25)$$

El criterio de daño es:

$$f(V, q(\alpha)) = \frac{\|V\|}{\sqrt{\frac{AG_s}{l}}} - q_{(\alpha)} \quad (3.26)$$

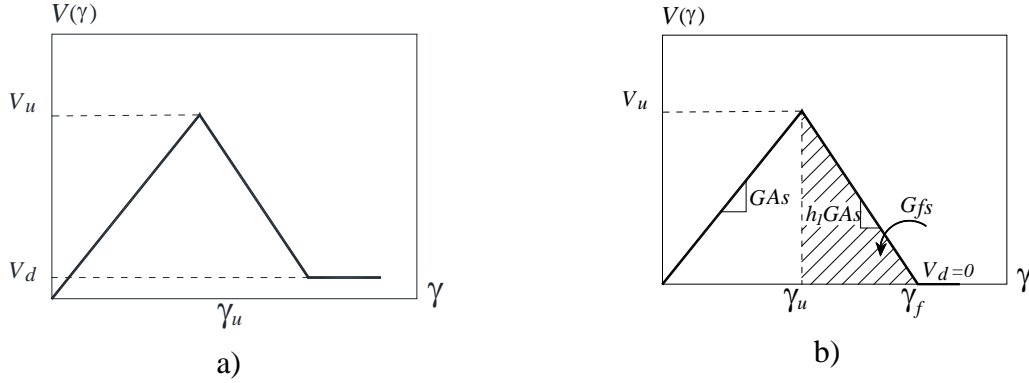
### 3.3.2 Elemento sin refuerzo transversal

Si el elemento no tiene refuerzo transversal, la pérdida de capacidad a cortante será inmediata a la capacidad máxima del concreto  $V_u$ , y se disminuye hasta el cortante por acción de dovela  $V_d$  (Park *et. al.* 1982), por lo cual el comportamiento  $V$ - $\gamma$  se considera bilineal, como se muestra en la Figura 3.12a. El aporte a cortante por acción de dovela  $V_d$

es relativamente pequeño respecto al cortante último  $V_u$ , por lo cual en este trabajo se considera  $V_d=0$ , como se muestra en la Figura 3.12b. La deformación a cortante,  $\gamma_f$ , de acuerdo con Rots *et. al.* (1987) es:

$$\gamma_f = \frac{2G_{fs}bd}{l_w V_u} \quad (3.27)$$

donde  $G_{fs}, l_w, b, d$ , son: la energía de fractura, el ancho de grietas, el ancho y altura efectiva, respectivamente, de la sección transversal del elemento.



**Figura 3.12 Comportamiento constitutivo: a) con acción de dovelas, b) idealizado (adaptado de Rots *et al.* 1987)**

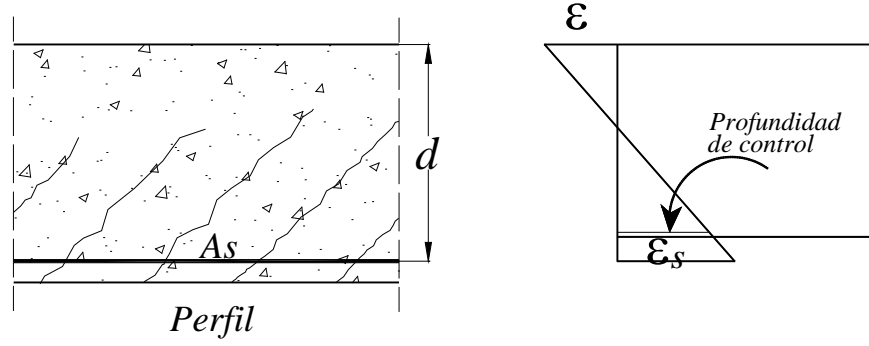
La energía de fractura, de acuerdo a Sarkhosh (2014) con las recomendaciones del Model Code 2010 (ceb-fib 2012), se calcula como:

$$G_{fs} = 73(f_c')^{0.18} \quad (3.28)$$

donde  $f_c'$  (MPa) es la resistencia de diseño a compresión del concreto,  $l_w$  es el ancho de grieta en la profundidad de control que es proporcional a la deformación longitudinal  $\varepsilon$ , como se muestra en la Figura 3.13, de acuerdo a Muttoni *et. al.* (2008), es:

$$l_w \propto \varepsilon d \quad (3.29)$$



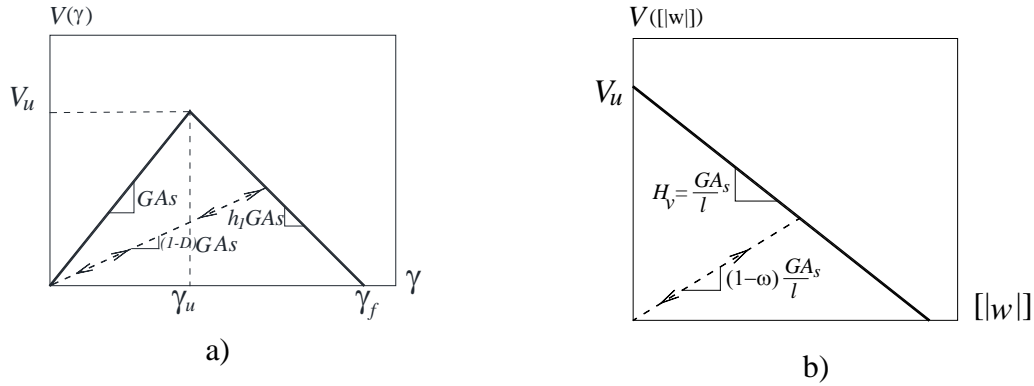


**Figura 3.13 Determinación de ancho de grietas (adaptado de Muttoni y Fernández 2008)**

El módulo de ablandamiento es:

$$h_1 = \frac{-V_u}{GA_s (\gamma_f - \gamma_u)} \quad (3.30)$$

y los comportamientos constitutivos continuo y discreto se muestran respectivamente en las Figura 3.14a y b.



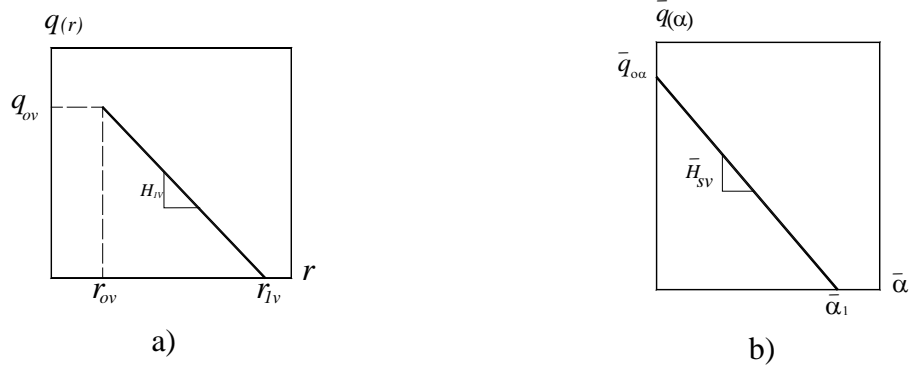
**Figura 3.14 Comportamientos constitutivos: a) continuo, b) discreto**

Las función de ablandamiento,  $q(r)$ , continuo se muestra en la Figura 3.15a y se define como:

$$q(r) = q_{ov} + H_{1v} (r - r_0); \quad r_{0v} \leq r \leq r_{1v} \quad (3.31)$$

donde

$$\begin{aligned}
 q_{0v} &= \frac{V_u}{\sqrt{AE}} \\
 r_{0v} &= q_{0v} \\
 r_{1v} &= r_{0v} + \left( \frac{q_{0v}}{H_{1v}} \right)
 \end{aligned}
 \tag{3.32}$$



**Figura 3.15 Función de ablandamiento: a) continuo, b) discreto**

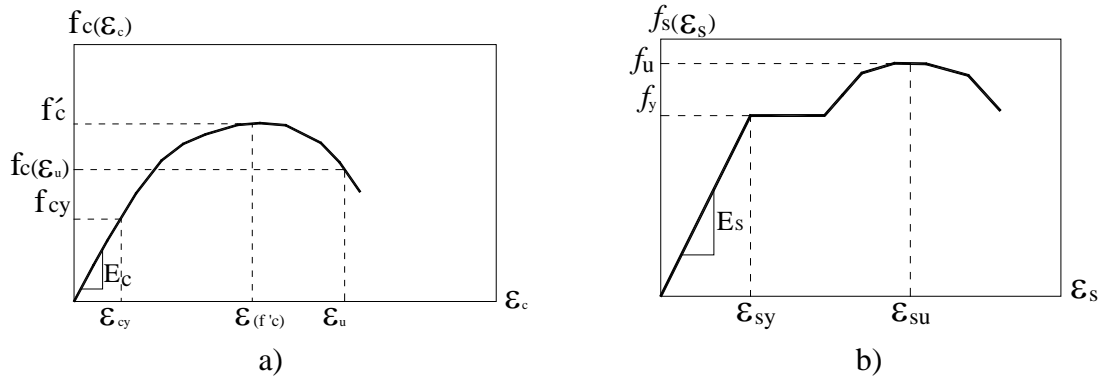
La función del criterio de daño es:

$$f(V, q) = \sqrt{V(GA_s)^{-1}V} - q(r) \tag{3.33}$$

La función de ablandamiento discreto es semejante a la definida en las ecs. (3.24) a (3.26).

### 3.4 Fuerza axial-deformación

El modelo constitutivo fuerza axial contra deformación de una sección de concreto reforzado considera el comportamiento constitutivo en los intervalos elásticos e inelásticos del concreto y acero, los cuales se muestran respectivamente en las Figura 3.16a y b.



**Figura 3.16 Curvas de esfuerzo-deformación: a) concreto, b) acero.**

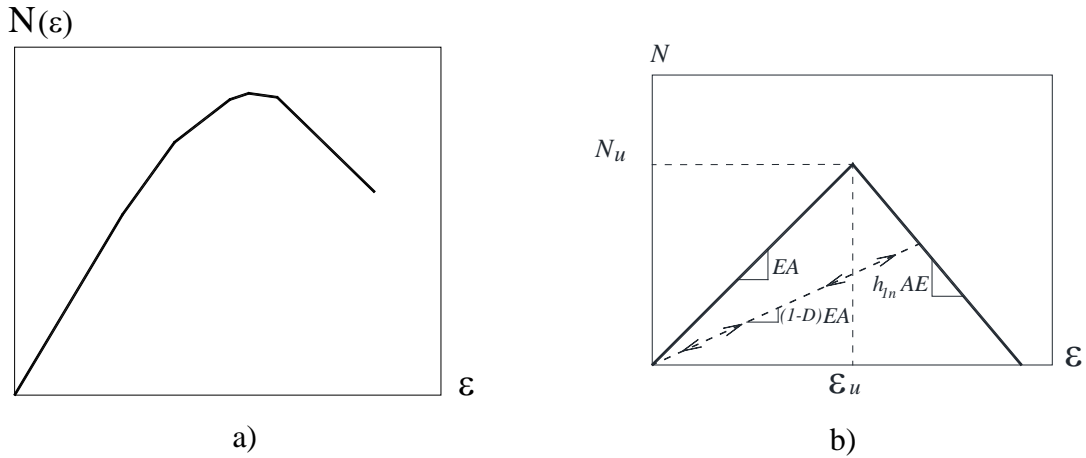
La capacidad de carga axial,  $N(\sigma_c)$ , en el intervalo elástico del concreto reforzado se determina con la ec. (3.34) de acuerdo a (Nilson *et al.* 2002), en la cual,  $\sigma_c$ , es el esfuerzo del concreto a compresión,  $A_g$ , es el área transversal del elemento y  $k$  es la relación modular del acero respecto al concreto,  $\frac{E_s}{E_c}$ .

$$N(\sigma_c) = \sigma_c [A_g + (k-1)A_s] \quad (3.34)$$

En términos generales, la capacidad a compresión del elemento se determina con la ec. (3.35), y ésta considera el intervalo elástico inelástico de cualquiera o ambos materiales, en la cual  $A_n$ , es el área neta de concreto,  $f_s$  es el esfuerzo en el acero, (Nilson *et al.* 2002).

$$N(\varepsilon) = \sigma_c A_n + f_s A_s \quad (3.35)$$

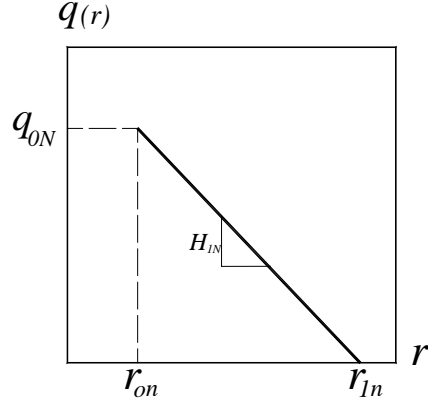
Se imponen las deformaciones axiales,  $\varepsilon$ , al elemento viga-columna de concreto reforzado y, de acuerdo al modelo constitutivo de los materiales mostrados en la Figura 3.16, se obtienen los respectivos esfuerzos,  $\sigma_c$  y  $f_s$ , que se sustituyen en la ec. (3.35) con la que se determina la curva mostrada en la Figura 3.17a. En este trabajo la curva obtenida se idealiza con el comportamiento constitutivo para el modelo de daño continuo que se muestra en la Figura 3.17b.



**Figura 3.17 Modelo constitutivo fuerza normal-deformación axial**

La fuerza normal secante se determina mediante:

$$N = (1-D)EA\varepsilon \quad (3.36)$$



**Figura 3.18 Función  $q(r)$  de ablandamiento axial.**

La función de ablandamiento  $q(r)$ , de acuerdo a la Figura 3.18, es:

$$q(r) = q_{0N} + H_{1N}(r - r_{on}); \quad r_{on} \leq r \leq r_{ln} \quad (3.37)$$

donde el módulo  $H_{1N}$  está definido en el anexo 1.

$$\begin{aligned} q_{0N} &= \frac{N_u}{\sqrt{AE}} \\ r_{on} &= q_{0N} \\ r_{ln} &= r_{on} + \left( \frac{q_{0N}}{H_{1N}} \right) \end{aligned} \quad (3.38)$$

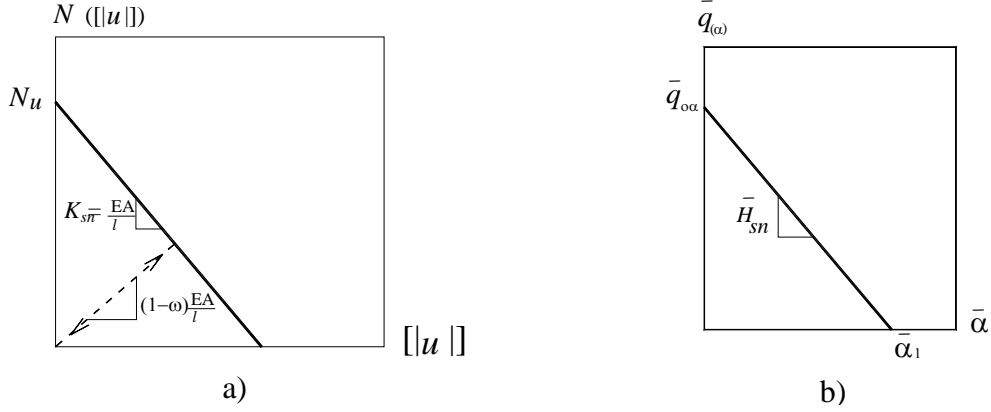
La función del criterio de daño es:

$$f(N, q) = \sqrt{N(EA)^{-1}N - q(r)} \quad (3.39)$$

El comportamiento fuerza normal contra deformación axial presenta el intervalo de ablandamiento negativo inmediatamente posterior al límite del intervalo elástico, por lo cual se implanta el modelo de daño discreto en esta región.

La Figura 3.19a muestra el comportamiento constitutivo discreto fuerza normal- salto en desplazamiento axial en la que:

$$N(\llbracket u \rrbracket) = (1 - w) \frac{EA}{l} \llbracket u \rrbracket \quad (3.40)$$



**Figura 3.19 a) Fuerza normal-salto axial, b) Función de ablandamiento discreto.**

La Figura 3.19b muestra la función de ablandamiento del modelo de daño discreto donde:

$$\bar{q}(\alpha) = \bar{q}_{0\alpha} + \bar{H}_{sn}\bar{\alpha} \quad (3.41)$$

y

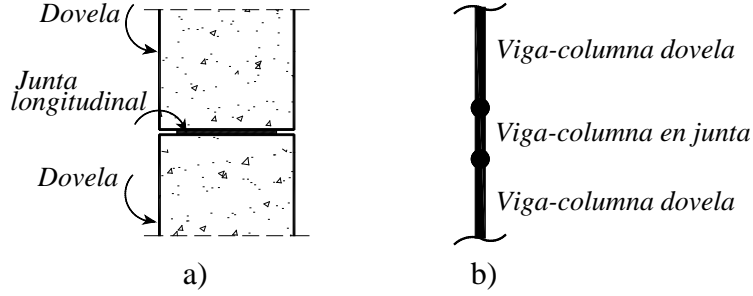
$$\begin{aligned} q_{0\alpha} &= \frac{N_u}{\sqrt{\frac{EA}{l}}} \\ \alpha_1 &= \frac{q_{0\alpha}}{H_{sn}} \end{aligned} \quad (3.42)$$

La función del criterio de daño discreto es:

$$f(N, q) = \frac{\|N\|}{\sqrt{\frac{EA}{l}}} - q(\alpha) \quad (3.43)$$

### 3.5 Juntas longitudinales entre dovelas

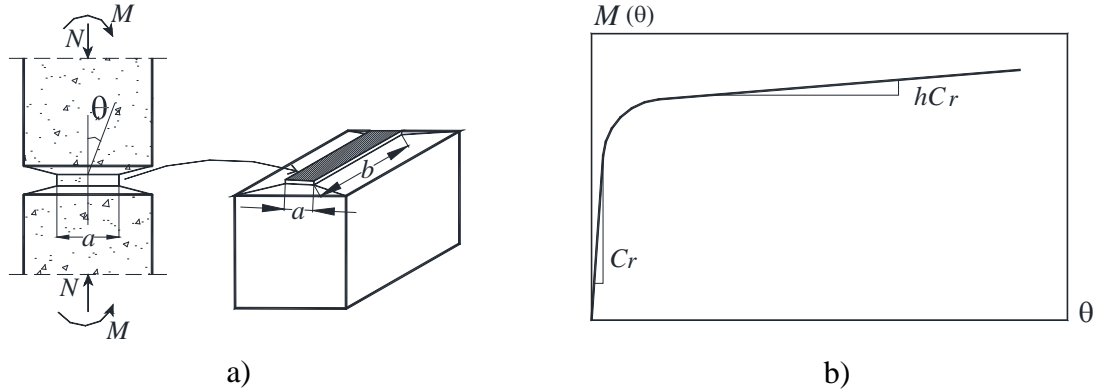
Un caso particular es el comportamiento constitutivo de las juntas longitudinales en las dovelas que conforman el cilindro de un túnel dovelado, el cual se utilizó para el modelado al colapso de este tipo de estructura. La Figura 3.20a muestra la junta longitudinal entre las dovelas, la cual se discretiza como se muestra en la Figura 3.20b, con un elemento viga-columna, para lo cual se utilizan los comportamientos constitutivos para flexión y cortante reportados de pruebas experimentales Leonhardt y Reimann (1966) y sustituyendo el comportamiento axial descrito en la sección 3.4.



**Figura 3.20 Junta longitudinal: a) contacto entre dovelas, b) discretización**

### 3.5.1 Momento-rotación

En la sección 1.2.2 se mencionó el estudio experimental realizado a dos piezas de concreto por Leonhardt y Reimann (1966), como las que se muestra en la Figura 3.21a, con el objetivo de determinar el comportamiento momento-rotación de las mismas. Posteriormente, Jansen (1983) desarrolló la formulación matemática de este comportamiento obteniendo la curva mostrada en la Figura 3.21b, con los valores de rigidez rotacional en la ec. (3.44).



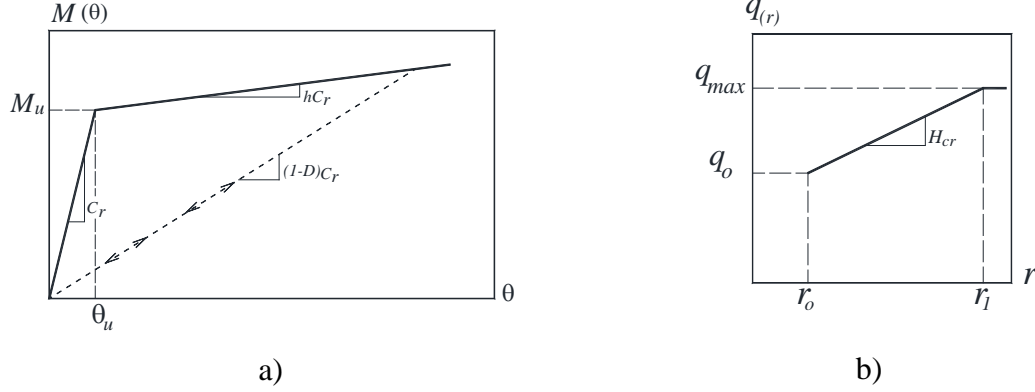
**Figura 3.21 a) junta ensayada por Leonhardt y Reimann (1966) y b) curva momento-curvatura Jansen (1983)**

$$\begin{aligned}
 C_r &= \frac{ba^2 E_c}{12}; & \theta &\leq \frac{2N}{E_c ba} \\
 hC_r &= \frac{9ba \left( \frac{2M}{Na} - 1 \right)}{8N} M; & \theta &> \frac{2N}{E_c ba}
 \end{aligned} \tag{3.44}$$

donde  $E_c$  es el módulo elástico del concreto,  $a$  y  $b$  son las dimensiones del área del contacto,  $M$  y  $N$  son el momento flexionante y la fuerza normal, respectivamente, como se muestra en la Figura 3.21a. Este comportamiento constitutivo se idealiza con la curva

mostrada en la Figura 3.22a, en el que el momento rotacional en la junta se calcula con el módulo secante:

$$M = (1 - D)C_r\theta \quad (3.45)$$



**Figura 3.22 a) comportamiento constitutivo momento-curvatura idealizado y b) función de ablandamiento positivo.**

La Figura 3.22b muestra la curva de la función de ablandamiento cuya ecuación es:

$$q(r) = q_o + H_{cr}(r - r_o) \quad (3.46)$$

en la que  $q_o$  se determina como:

$$q_o = \frac{M_u}{\sqrt{C_{cr}}} \quad (3.47)$$

y el criterio de daño es:

$$f(M, q) = \sqrt{M(C_r)^{-1}M} - q(r) \quad (3.48)$$

### 3.5.2 Deslizamiento por cortante

La conexión entre las dovelas se considera a fricción por el simple contacto, por lo cual el comportamiento a cortante se consideró con base en el trabajo realizado por Scott (2010), quien ensayó la capacidad de la junta entre dos superficies de concreto sometida a fuerzas de fricción y normal, como se muestra en la Figura 3.23a, con el cual obtuvo un comportamiento constitutivo bilineal con una rama ascendente y otra descendente como se muestra en la Figura 3.23b, en la que la fuerza de fricción corresponde al cortante en la junta, cuyo valor es:

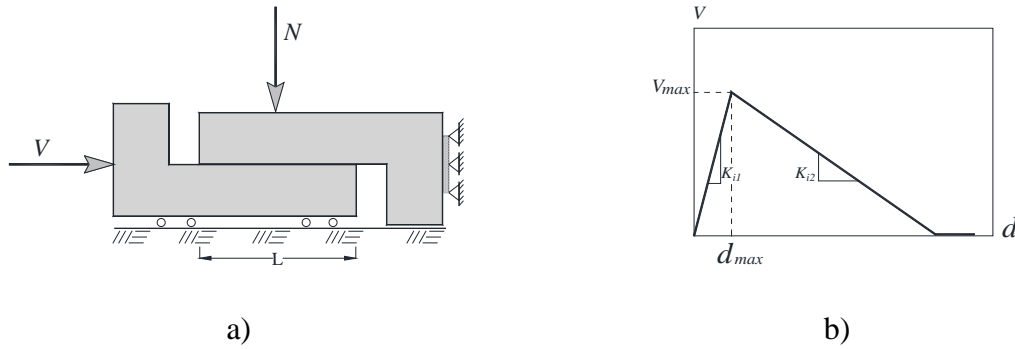
$$V = \mu N \quad (3.49)$$

donde  $\mu$  es el coeficiente de fricción entre las superficies de contacto. En este trabajo se consideran superficies de contacto entre placas de madera contrachapada para la conexión entre anillos dovelados, en los que se utilizan los coeficientes de Gijsbers y Hordijk (1997) que varían de 0.30 a 0.53, y el contacto entre superficies concreto para la unión de las dovelas que forman los anillos son de acuerdo al ACI 318-08/318R-08 donde se recomienda un valor de 0.6 para simple contacto. Las rigideces se determinan como:

$$K_{i1} = \frac{G_i A_i}{t} \quad (3.50)$$

$$K_{i2} = -\zeta K_{i1}$$

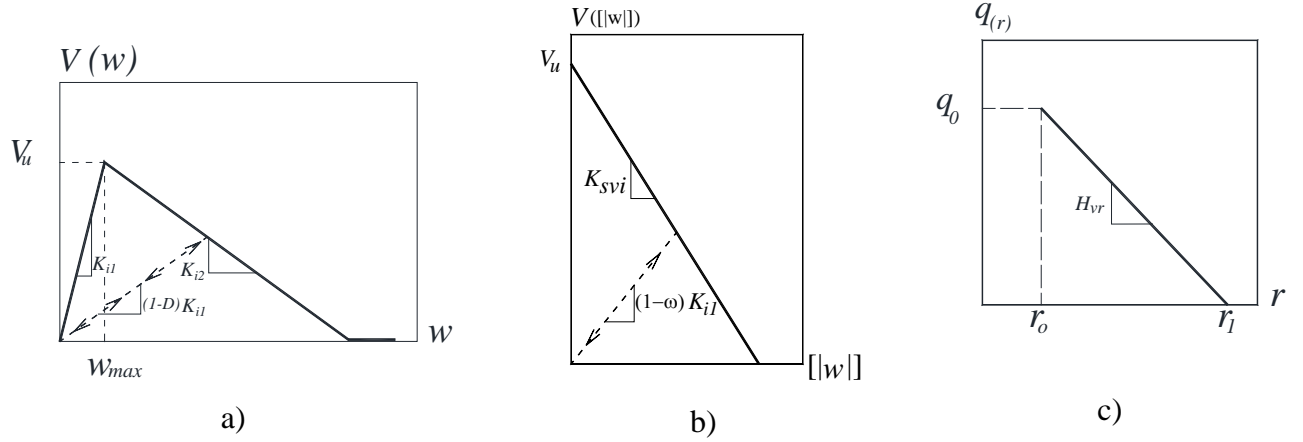
donde  $G_i$ ,  $A_i$  y  $t$  son el módulo de cortante, área de contacto y espesor de la interfaz, respectivamente.  $\zeta$  es un factor de reducción con un valor aproximado a 0.085 (Scott 2010), para una superficie de concreto.



**Figura 3.23 a) Elementos ensayados y fuerzas aplicadas, b) comportamiento constitutivo (adaptado de Scott 2010).**

Con la curva de la Figura 3.23b se determina el comportamiento constitutivo mostrado en la Figura 3.24a, en la cual  $w$  es el desplazamiento tangencial en la junta.





**Figura 3.24 Curva en la junta a) cortante-desplazamiento, b) función de ablandamiento por cortante.**

La Figura 3.24b muestra la curva del comportamiento del salto de la discontinuidad en la junta y la Figura 3.24c es la función de ablandamiento  $q(r)$ , con la que se define la función del criterio de falla al igual como se definieron los modelos de daño, anteriores.

# CAPÍTULO 4

## Estrategia de solución

---

En este capítulo se presentan los algoritmos desarrollados para implantar en el programa FEAP los elementos finitos viga-columna con discontinuidades y los modelos constitutivos. Se implanta el elemento viga-columna con discontinuidades que sólo considera la energía por flexión y carga axial, así como el elemento que además considera la energía por cortante, ambos formulados en la sección 2.4. El comportamiento constitutivo de los materiales se realiza con base en los modelos descritos en el capítulo tres, en los que se considera el inicio y evolución del daño en el material.

Para la implantación se construyeron subrutinas de usuario (*user subroutine*) con los elementos y modelos constitutivos, los cuales se activan dentro de la estructura a través de los comandos indicados en el archivo de entrada, para su análisis en FEAP (Taylor 2008b), como se muestra en la Tabla 4.1, donde los comandos se llaman por las primeras cuatro letras.

**Tabla 4.1 Estructura de la entrada de datos en el programa FEAP**

<i>FEAP **name model</i>
<i>MATeRial</i>
<i>COORdinateS</i>
<i>ELEMents</i>
<i>BOUNDary restraints</i>
<i>FORCes</i>
<i>END</i>
<i>BATCh</i>

La primera línea contiene obligatoriamente el comando FEAP para indicar que es un archivo de comandos para FEAP, seguido del nombre de identificación del modelo numérico a analizar; en el comando *MATeRial* se indica el tipo de elemento finito y su correspondiente modelo constitutivo, asignando sus propiedades mecánicas; las coordenadas de los nodos de discretización del modelo numérico se introducen en *COORdinateS*. *ELEMents* contiene la asignación del material y conectividades de los elementos finitos utilizados en los nodos coordinados; los desplazamientos impuestos se asignan en *BOUNDary restraints*, las fuerzas se asignan con el comando *FORCes*, el

comando *END* indica la finalización de la entrada de datos e inmediatamente pasa a la fase de cálculos en *BATCh*.

El comando *MATeRIal* tiene la estructura mostrada en la Tabla 4.2, donde se asignan los tipos de elementos finitos y los modelos constitutivos.

**Tabla 4.2 Estructura del comando *MATeRIal*.**

<i>MATeRIal</i> , #
yyyyy
<i>ELAStic ISOTropic e nu</i>
<i>UCONstitutive</i> , xxxx, <i>v1 v2</i>

En la que yyyyy es el el tipo de elemento finito a utilizar, *ELAStic ISOTropic* se refiere al material isotrópico con un módulo de Young *e* y una relación de Poisson *nu*. Cuando se trata de un modelo constitutivo implantado por el usuario, se debe utilizar el subcomando *UCONstitutive*, en el cual se define el nombre del modelo constitutivo en xxxx y la serie de propiedades del modelo constitutivo en *v1*, *v2*, ..., *vn* , respectivamente.

En FEAP se incorporan las subrutinas en lenguaje computacional FORTRAN, para los modelos constitutivos y el elemento finito desarrollado. Así por ejemplo, para incluir los modelos constitutivos con sus parámetros se utiliza la subrutina *UMATIn* con la siguiente estructura, subroutine *umatIn* (*type*, *vv*, *ud*, *n1*, *n3*), en la que *type* es el nombre del modelo constitutivo, *vv* es el arreglo que contiene los valores del modelo constitutivo, *ud* es el arreglo de datos de los parámetros asignados al material, *n1* contiene los datos calculados en la paso anterior, *t<sub>n</sub>*, los cuales se actualizan en el paso actual, *t<sub>n+1</sub>*, por lo cual se le declaran variables *nh1* y *nh2* para almacenar los valores, respectivamente, y *n3* es un parámetro de datos adicionales, opcional en el subprograma que no se utiliza necesariamente (Taylor 2008b).

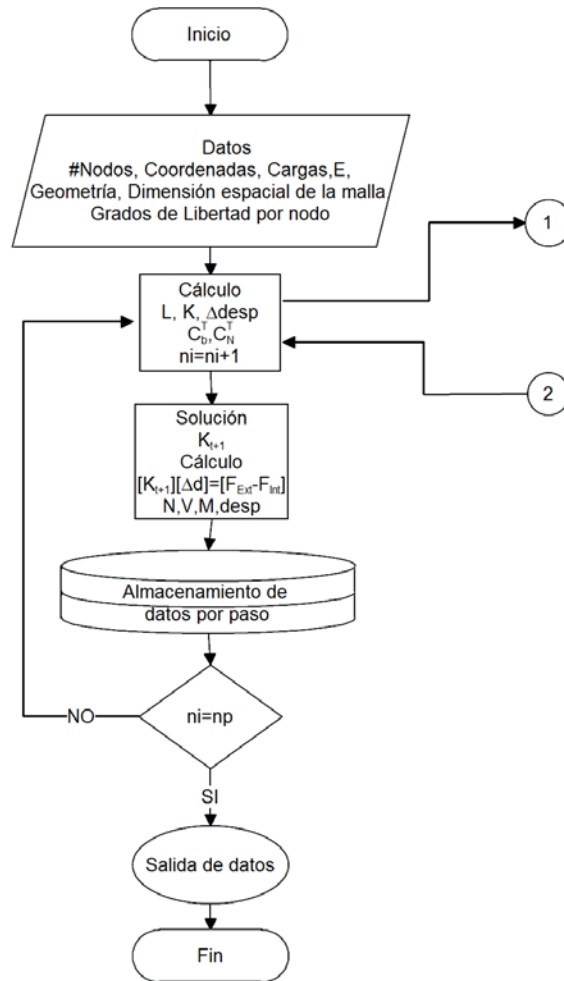
El subprograma que se utiliza para incorporar el elemento finito es *ELMTNN* y su estructura es subroutine *elmtnn* (*d*, *u1*, *x1*, *ix*, *t1*, *s*, *r*, *ndf*, *ndm*, *nst*, *isw*) en la que *d* son los datos de los parámetros del elemento, e.g., módulos del material, peso propio, cargas, etc., *u1* son los parámetros de la solución nodal tales como desplazamientos, incrementos de desplazamientos, velocidades, etc., *x1* son las coordenadas nodales del elemento, *ix* es la cantidad de nodos del elemento, *t1* valores de temperatura en el nodo (cuando se trate de un problema térmico), *s* matriz de rigideces del elemento, *r* vector de residuos de fuerzas, *ndf* grados de libertad en el nodo, *ndm* espacio dimensional de la malla, *nst* tamaño de *s* y *r* y *isw* es la solicitud que se le asigna al subprograma para un determinado cálculo, e.g., descripción de elementos, entrada o salida de datos, revisión de errores, cálculo de fuerzas, etc. (Taylor 2008b).

Para implantar un elemento finito definido por el usuario, se debe reemplazar en el renglón yyyyy, de la estructura del comando MATERial, de la Tabla 4.2, por el subcomando *USER nn*, en el cual *nn* es un número asignado a la subrutina *elmtnn*, que puede ser un valor comprendido entre 01-50, *e.g.*, *elmt03* (*d*,..., *isw*), en este caso el elemento finito se declara en el archivo de entrada como *USER 03*.

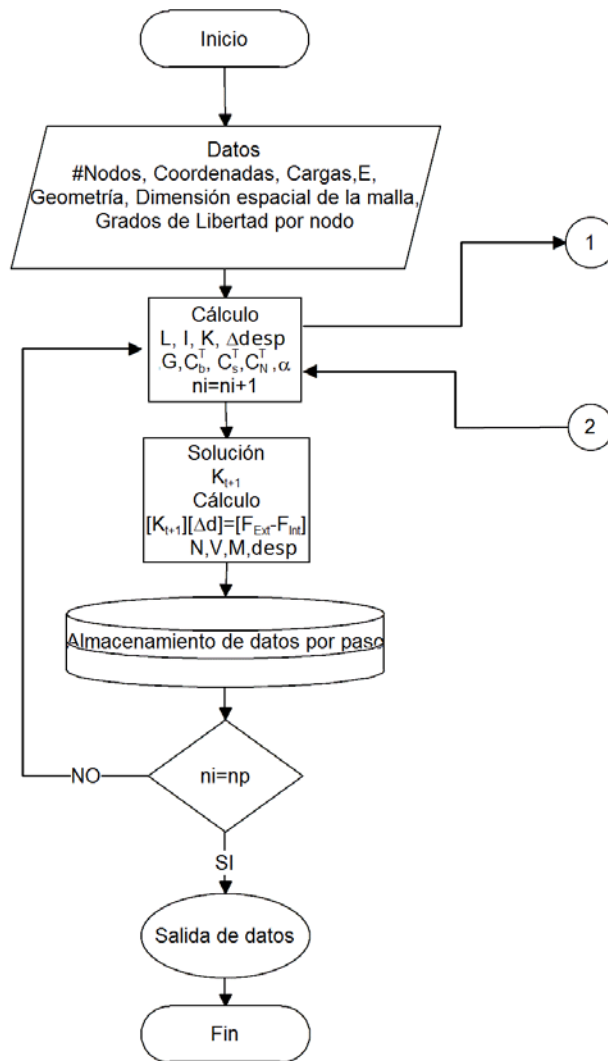
Los procesos de cálculos de fuerzas, matrices de rigideces, residuos, desplazamiento se asignan mediante el comando BATCh. Con las recomendaciones anteriores se implantaron las subrutinas de los elementos finitos y modelos constitutivos.

#### 4.1 Implantación del elemento viga-columna con discontinuidades interiores

La Figura 4.1 muestra el algoritmo del proceso de cálculo con elementos finitos viga-columna delgada, mientras que la Figura 4.2 muestra el caso de viga-columna gruesa, ambos con discontinuidades interiores. En cualquiera de los casos, se programaron en las subrutinas *elmt0n* (*d*, *u1*, *x1*, *ix*, *t1*, *s*, *r*, *ndf*, *ndm*, *nst*, *isw*). Los datos de cargas, módulo de elasticidad, coordenadas, número de nodos, espacio dimensional del modelo numérico y los grados de libertad se toman del archivo de entrada, los cuales se asignan a los parámetros *d*, *x1*, *ix*, *ndf* y *ndm*, según corresponda. Con estos valores se determinan el momento de inercia *I*, módulo de cortante *G*, longitud del elemento *L* y el área transversal *A*, la rigidez a cortante  $\alpha$ , que junto con el módulo de Young *E* forman la matriz de rigideces *[K]* para cada elemento finito, de acuerdo a la ec. (2.56) o (2.57) según sea el caso. También se requiere el valor de los operadores constitutivos tangentes para la rigidez axial  $C_N^T$  y flexión  $C_b^T$  para elementos delgados, y el de la rigidez a cortante  $C_s^T$  en el caso de elementos gruesos.



**Figura 4.1 Diagrama de flujo del algoritmo del elemento viga-columna delgadas con discontinuidades**



**Figura 4.2 Diagrama de flujo del algoritmo del elemento viga-columna gruesas con discontinuidades**

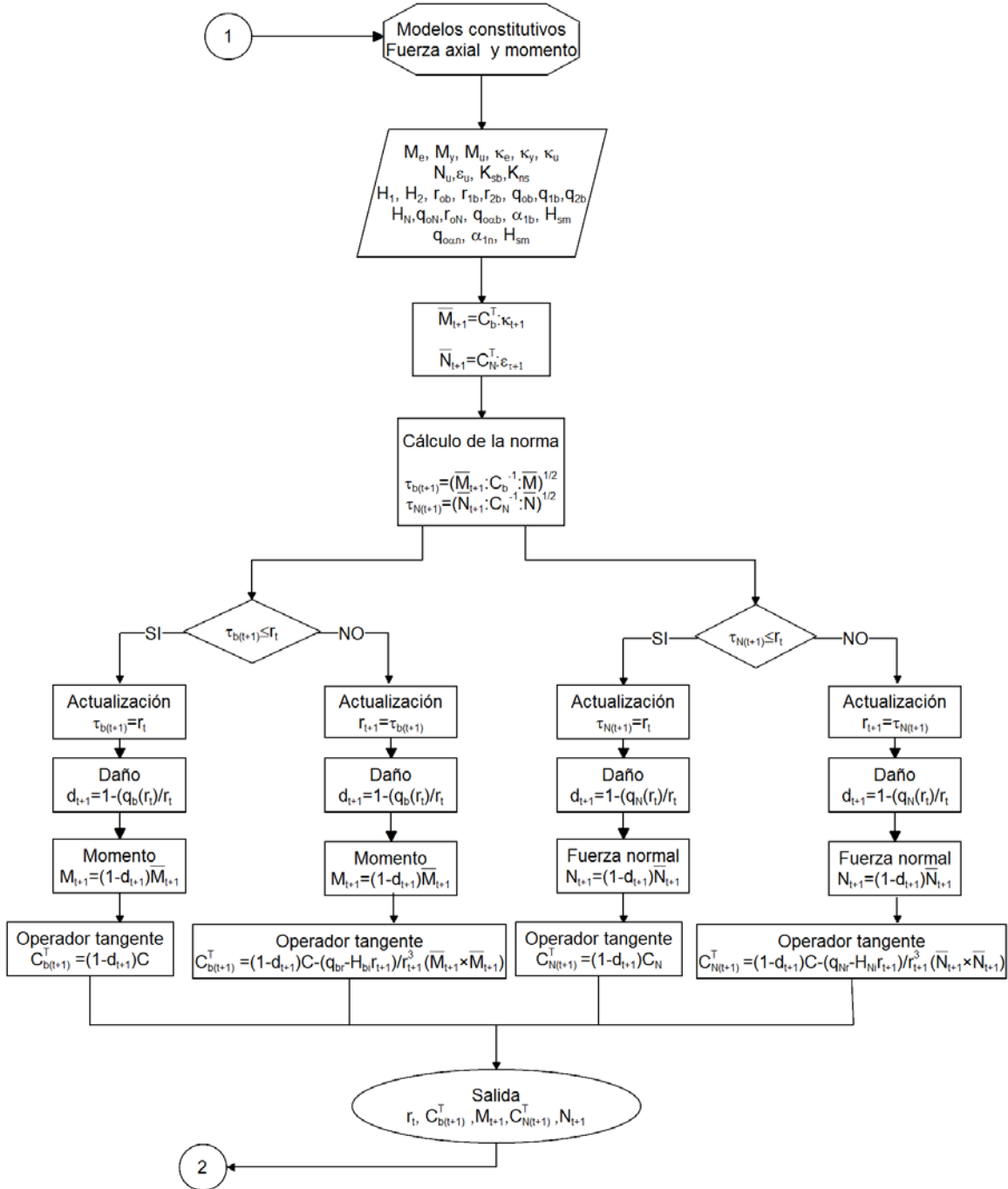
Una vez que se tiene el incremento de desplazamientos y rotación correspondiente al paso de carga actual, se activan los modelos constitutivos de fuerza axial- desplazamiento, cortante-desplazamiento transversal y momento-curvatura, según se requiera, a través de la subrutina mostrada más adelante, en la sección 4.2. Al terminar el ciclo de cálculo de las subrutinas de los modelos constitutivos, se obtienen actualizados los operadores tangentes  $C_i^T$  y la variable interna evaluada en el tiempo  $t_i$ .

Con los valores actualizados de los operadores tangentes del comportamiento de fuerza normal  $C_N^T$ , cortante  $C_S^T$  y momento  $C_b^T$ , se actualiza la matriz de rigideces al igual que el vector de fuerzas residuales  $r$ , en el que se utilizan la ecs. (2.15), (2.16), (2.31), (2.32) y

(2.55). Finalmente se determinan los desplazamientos en los nodos con los que se calculan los elementos mecánicos en cada elemento.

## **4.2 Implantación de los modelos constitutivos momento-curvatura cortante-desplazamiento transversal y fuerza normal-desplazamiento axial**

En la Figura 4.3 se muestra el algoritmo para determinar las matrices tangentes y vectores de fuerzas en los elementos viga-columna delgadas, y para vigas-columnas gruesas en la Figura 4.4. El proceso de cálculo se programa en la subrutina *umatil* (*momento*, *vv*, *ud*, *n1*, *n3*), *umatil* (*fuerza\_cortante*, *vv*, *ud*, *n1*, *n3*) y *umatil* (*fuerza\_normal*, *vv*, *ud*, *n1*, *n3*), para el modelo constitutivo momento-curvatura, cortante- desplazamiento transversal y fuerza axial- desplazamiento axial, respectivamente. Con los datos de entrada de esta subrutina se determinan los comportamientos constitutivos continuos o discretos, mostrados en las Figuras: 3.5, 3.7a, 3.9b, 3.11a, 3.17, 3.19a, 3.22, 3.24a, 3.24b, y las funciones de ablandamiento ( $q_{ir}$ ) de acuerdo a las ecs. (3.8), (3.12), (3.20), (3.24), (3.37) y (3.41), para los modelos de daño continuo y discreto, de acuerdo al desarrollo en las secciones 3.2 a 3.4.



**Figura 4.3 Representación del algoritmo del modelo constitutivo para el elemento viga-columna con discontinuidades sin deformación por cortante.**

Los valores de fuerza axial efectiva  $\bar{N}$ , cortante  $\bar{V}$  y momento efectivo  $\bar{M}$ , se calculan con los operadores constitutivos tangentes axial, cortante y flexión, y la deformación y rotación correspondiente. Estos valores se utilizan para determinar la norma  $\tau_i$ , la cual se compara con el valor de la variable interna de daño  $r_t$ , y se evalúa la condición





del elemento, ya sea de carga, descarga o carga neutra. Una vez actualizada la norma se determina el valor del daño con el que se calcula el momento interno, fuerza cortante y normal interna en el elemento ( $M$ ,  $V$ ,  $N$ ), al igual que el operador tangente axial y momento. Estos valores actualizados se devuelven al ciclo de cálculo del elemento finito viga-columna, con los que se obtienen las soluciones particulares para cada elemento.

# CAPÍTULO 5

## Ejemplos de aplicación

---

Este capítulo presenta los ejemplos de aplicación, que engloban soluciones numéricas y experimentales reportadas en la literatura, con las cuales se validan los elementos finitos viga-columna con discontinuidades desarrollados e implantados en esta tesis.

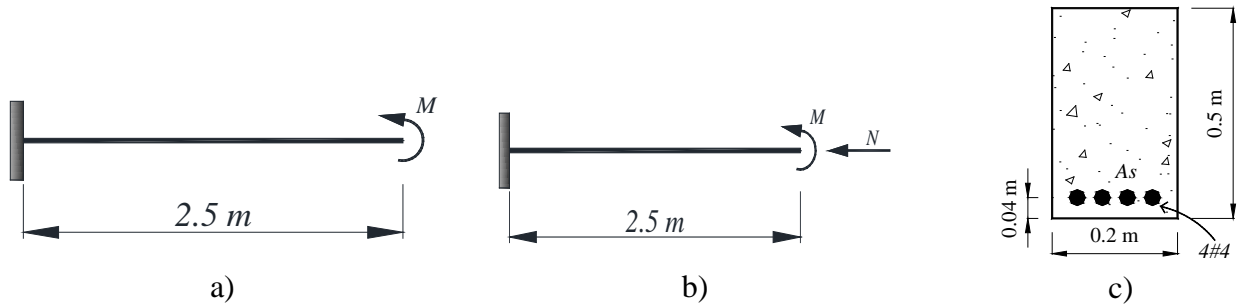
Se realizaron ejemplos de vigas y marcos estructurales discretizados con elementos finitos viga-columna gruesa o delgada con discontinuidades, de acuerdo con la formulación del capítulo dos. Cuando se satisface la relación del peralte entre la longitud de la viga,  $h/L \leq 0.20$ , se utiliza el elemento viga-columna delgada y se implementan los comportamientos constitutivos de momento contra curvatura y fuerza normal contra deformación axial, en caso contrario se utiliza el elemento viga-columna gruesa y se incluye el comportamiento constitutivo cortante contra deformación transversal.

Finalmente, se realizó el modelo numérico de pruebas experimentales en túneles, contruidos con dovelas, que fueron ensayados mediante cargas aplicadas que modelan los efectos de la presión del suelo en contacto con el perímetro del anillo. Los resultados numéricos se comparan con las curvas registradas de las fuerzas aplicadas y los desplazamientos medidos, así como también se comparan las zonas donde se reportó daño en la estructura con el daño calculado en los modelos numéricos.

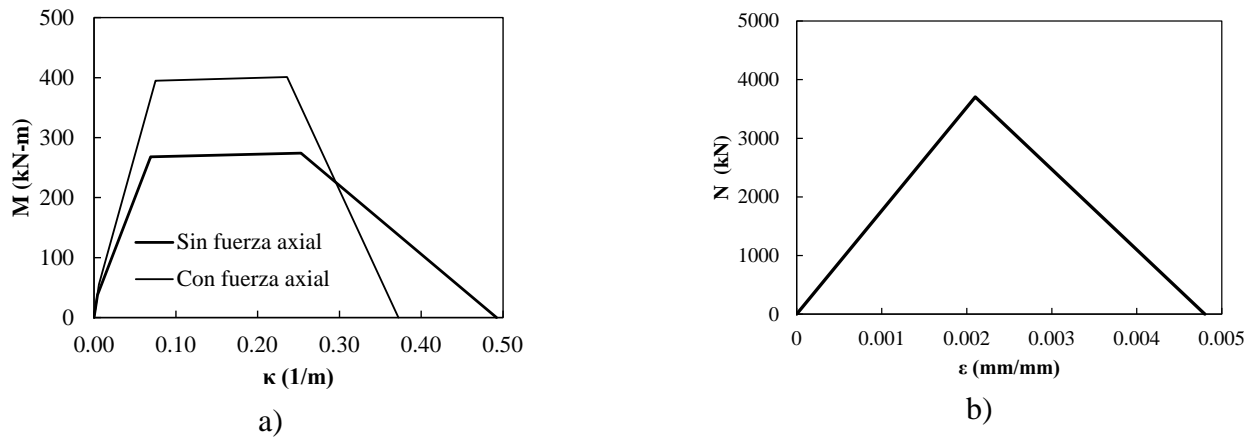
### 5.1 Discontinuidades en vigas

#### 5.1.1 Viga sujeta a momento en el extremo

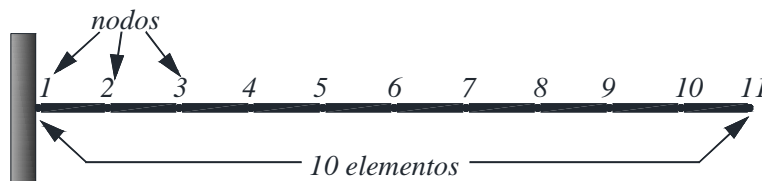
Se desarrolló un ejemplo teórico de una viga en voladizo que se somete a un momento incremental en el extremo libre como se muestra en la Figura 5.1a. La viga tiene una longitud  $2.5m$  y una sección transversal simplemente reforzada mostrada en la Figura 5.1c. Las propiedades mecánicas del concreto son: módulo de Young  $E_c=37.272 \text{ GPa}$  y esfuerzo a compresión del concreto  $f'_c=38 \text{ MPa}$ . El acero de refuerzo consiste de cuatro barras longitudinales del acero número 4 con las propiedades mecánicas siguientes: módulo de Young  $E_s=200 \text{ GPa}$  y esfuerzo de fluencia  $f_y=400 \text{ MPa}$ , el estudio considera sólo el comportamiento a flexión, por lo cual no se incluye refuerzo transversal. Con estas propiedades mecánicas se determinan los comportamientos constitutivos de momento contra curvatura con y sin fuerza axial aplicada, así como el comportamiento de fuerza normal contra deformación axial en compresión, los cuales se muestran respectivamente en la Figura 5.2.



**Figura 5.1** Viga en canto libre: a) y b) geometría y aplicación de fuerzas, c) sección transversal reforzada.



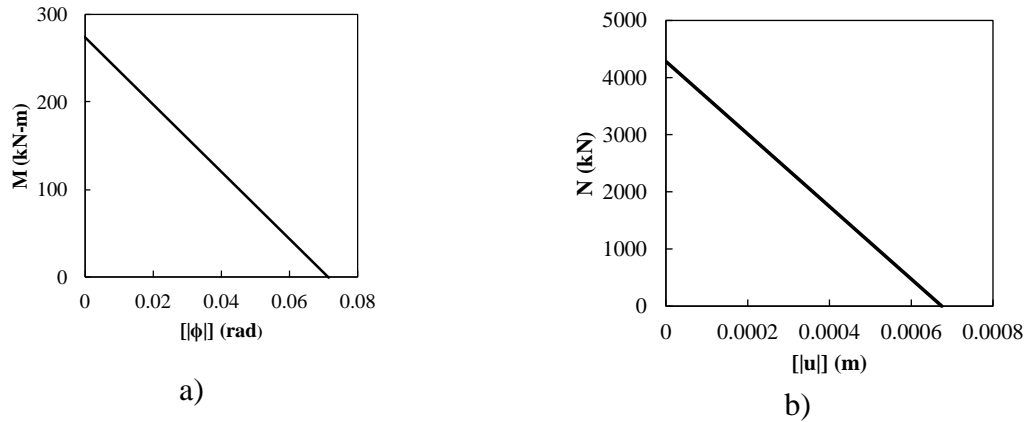
**Figura 5.2** Comportamientos constitutivos: a) momento-curvatura y b) fuerza normal-deformación axial



**Figura 5.3** Discretización de la viga en canto libre.

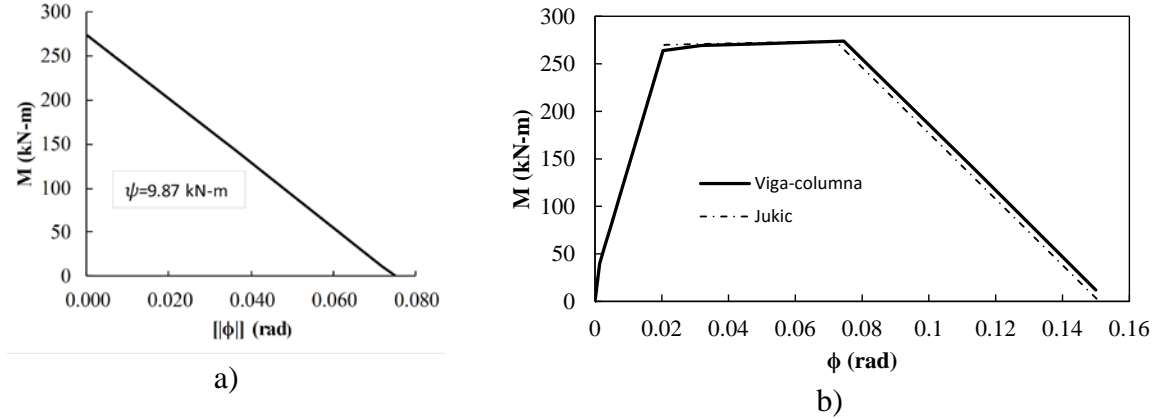
La viga se discretiza con elementos viga-columna delgada de veinticinco centímetros, como se muestra en la Figura 5.3, se utilizan los comportamientos constitutivos mostrados en la Figura 5.2, para el comportamiento momento contra curvatura sin fuerza axial. Se implementa el modelo de daño continuo en los intervalos de ablandamiento positivo y el

modelo de daño discreto en el intervalo de ablandamiento negativo. Los comportamientos para momento contra salto en rotación y fuerza normal contra salto desplazamiento axial se muestran en la Figura 5.4 a y b. Estas curvas se obtuvieron multiplicando los respectivos valores de curvatura,  $\kappa$ , y deformación axial,  $\varepsilon$  de los comportamientos de la Figura 5.2 por la longitud del elemento finito con la cual se discretizó la viga. Para la solución de este problema, se aplicó la rotación gradualmente en el extremo derecho de la viga, donde se calculó el momento como la reacción en ese extremo.



**Figura 5.4 Comportamientos constitutivos discretos; a) momento-salto rotación y b) fuerza normal-salto desplazamiento axial**

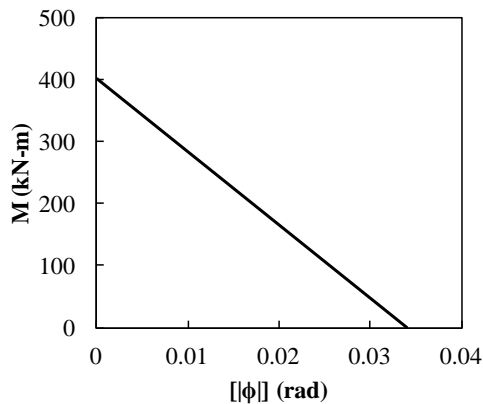
En la Figura 5.5a se muestra la variación del momento,  $M$  contra salto en la rotación,  $[[\phi]]$  en la que se observa que la energía disipada,  $9.87 \text{ kN m}$  es congruente con la energía aportada por comportamiento constitutivo momento-salto de rotación. En la Figura 5.5b se muestra la curva momento contra rotación de la solución completa, la cual es congruente con la obtenida por Jukic (2013), quién desarrolló el mismo ejemplo utilizando elementos vigas de Euler-Bernoulli con discontinuidades. Debido a la distribución uniforme de momento flexionante a lo largo de la viga, todos los elementos desarrollan una articulación simultáneamente, por lo que la curva momento contra rotación es idéntica para cualquiera de los elementos con los que se discretizó el modelo numérico.



**Figura 5.5** Curva de la variación momento contra rotación: a) momento contra salto rotación, b) comportamiento total

### 5.1.2 Viga en voladizo sujeta a momento y fuerza axial

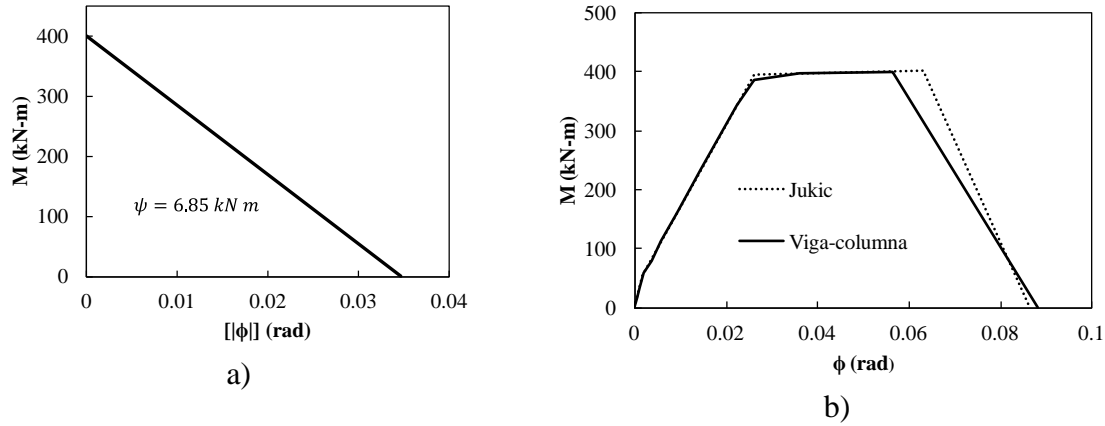
La viga en voladizo analizada en el ejemplo anterior, sección 5.1.1, se le aplicó primeramente una carga axial,  $N = 100$  kN, como se muestra en la Figura 5.1b y, posteriormente, se impuso gradualmente la rotación en el extremo libre con el que se determinó la variación del momento,  $M$ . Al igual que la anterior sólo se considera el comportamiento por flexión, por lo cual no se utiliza refuerzo transversal. La fuerza normal modifica el comportamiento constitutivo momento-curvatura, pues incrementa la capacidad de momento de la sección y reduce la de rotación, como se muestra en Figura 5.2a. El comportamiento constitutivo momento,  $M$  contra salto de rotación,  $[\phi]$  que se utilizó para el modelo de daño discreto se muestra en la Figura 5.6.



**Figura 5.6** Comportamiento constitutivo momento contra salto de rotación.

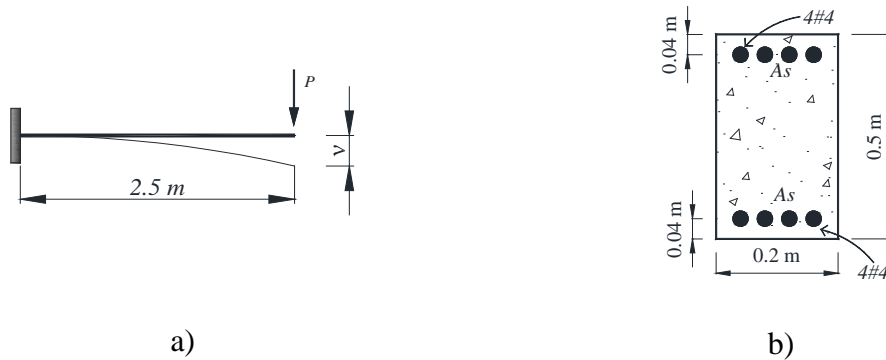
El modelo se discretizó con 10 elementos, al igual que el caso de solo flexión. En la Figura 5.7a se muestra la curva momento,  $M$  contra salto de rotación,  $[\phi]$  que representa la energía disipada en la discontinuidad  $\psi = 6.85$  kN m, igual que la aportada por el sistema, que es la

misma para cualquier elemento, debido a que el momento flexionante es uniforme y la fuerza normal es constante en toda la extensión de la viga. La curva del desempeño total obtenida numéricamente, se compara con la obtenida por Jukic (2014), donde se observa que son congruentes hasta una rotación de  $0.57 \text{ rad}$ ; sin embargo, para rotaciones mayores, se presentan diferencias atribuidas a los modelos constitutivos distintos utilizados en ambas soluciones.



**Figura 5.7 Variación del momento,  $M$ , debido al incremento de rotaciones,  $\phi$ : a) salto de rotación, b) comportamiento total.**

### 5.1.3 Viga en voladizo sujeta a carga vertical

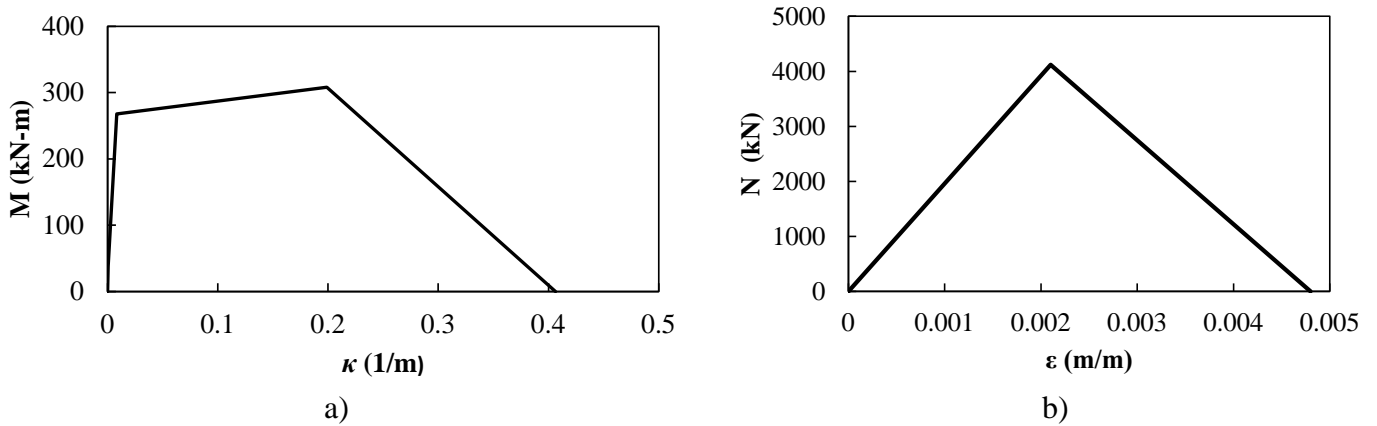


**Figura 5.8 Viga canto libre a) geometría y carga y b) sección transversal reforzada.**

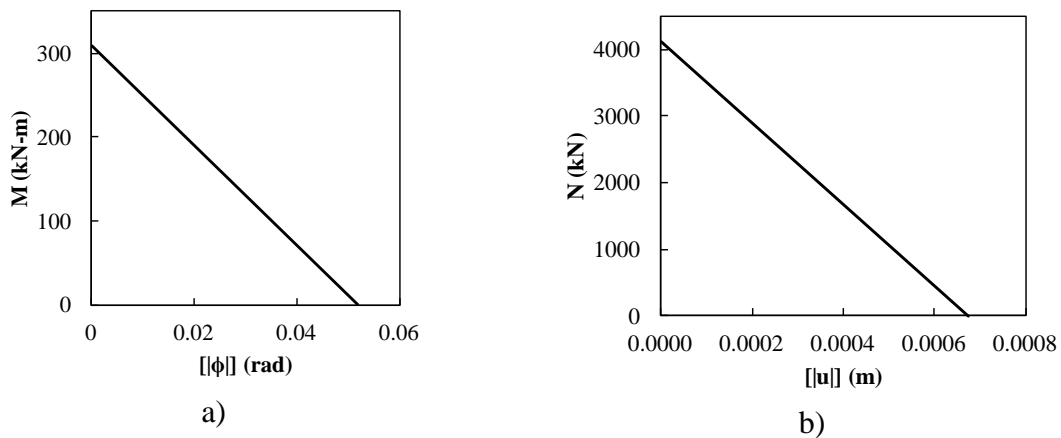
La viga utilizada en los ejemplos anteriores, ahora se somete a una carga  $P$  variable en el extremo, como se muestra en la Figura 5.8a. Además del acero de refuerzo inferior se coloca refuerzo en la parte superior de cuatro barras de acero del número 4, como se muestra en la Figura 5.8b.

Los comportamientos constitutivos momento contra curvatura y fuerza axial contra deformación se muestran respectivamente en la Figura 5.9, los cuales difieren de los ejemplos anteriores debido al incremento del acero de refuerzo, en la Figura 5.10 se

muestran los comportamientos momento,  $M$ , contra salto de rotación y fuerza axial contra salto,  $[[u]]$ .



**Figura 5.9 Comportamientos constitutivos: a) momento-curvatura y b) fuerza normal-deformación axial**

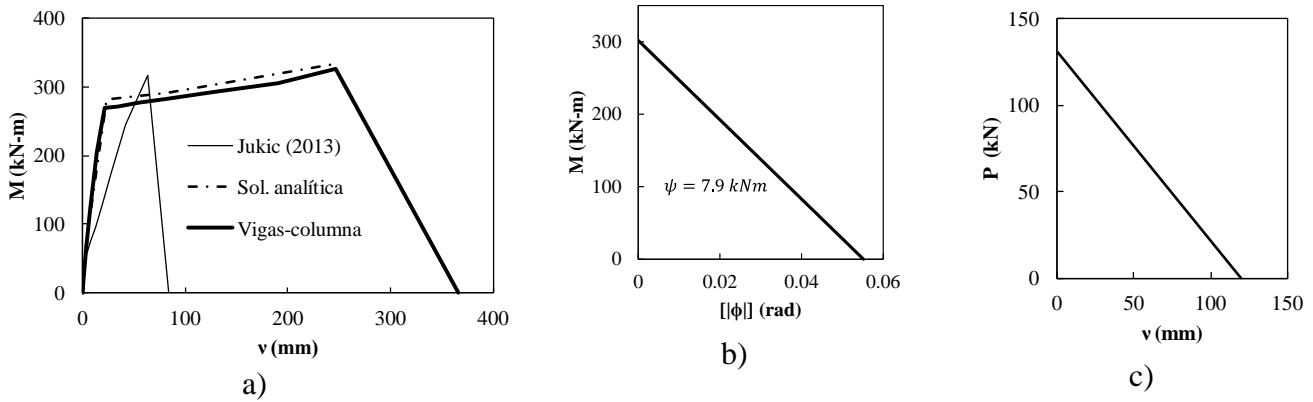


**Figura 5.10 Comportamientos constitutivos discretos: a) momento contra salto de rotación, b) fuerza normal contra salto en el desplazamiento axial.**

En este ejemplo se utilizó la misma discretización de las dos vigas anteriores. Para la solución de este problema se impone gradualmente un desplazamiento vertical  $v$  en el extremo libre donde se determina la reacción vertical. En la Figura 5.11a, se muestra la curva momento-desplazamiento, la cual se compara con la obtenida por Jukic (2013), donde se observa que las curvas son distintas, por lo que se obtuvo una solución analítica la cual se ajusta aceptablemente al comportamiento obtenido mediante el uso de viga-columna delgada, donde las pequeñas diferencias se deben a la precisión del cálculo manual en el que la viga se discretizó en tramos mayores. En la Figura 5.11b y c, se muestran las variaciones de momentos contra saltos de rotación,  $[[\phi]]$ , en el apoyo de la viga y la fuerza  $P$

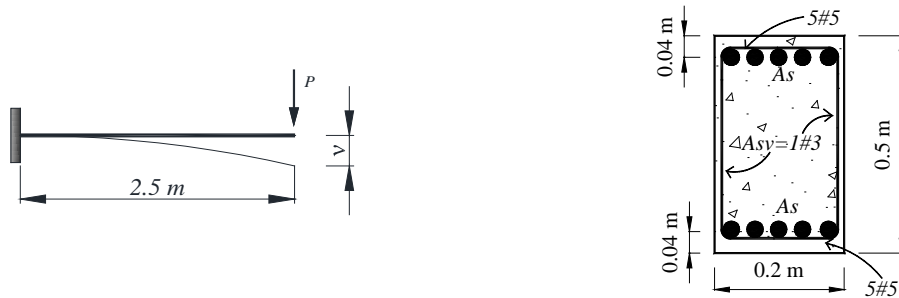


contra desplazamiento en el extremo libre para el intervalo del salto rotación. Se observa que la energía disipada,  $G_f = 7.9 \text{ kN m}$ , en la articulación es igual al trabajo realizado por la fuerza en el extremo.



**Figura 5.11** Curvas de variaciones: a) comparación de resultados, b) momento contra salto por rotación y c)  $P$  contra desplazamiento vertical  $v$  en el intervalo de salto rotación.

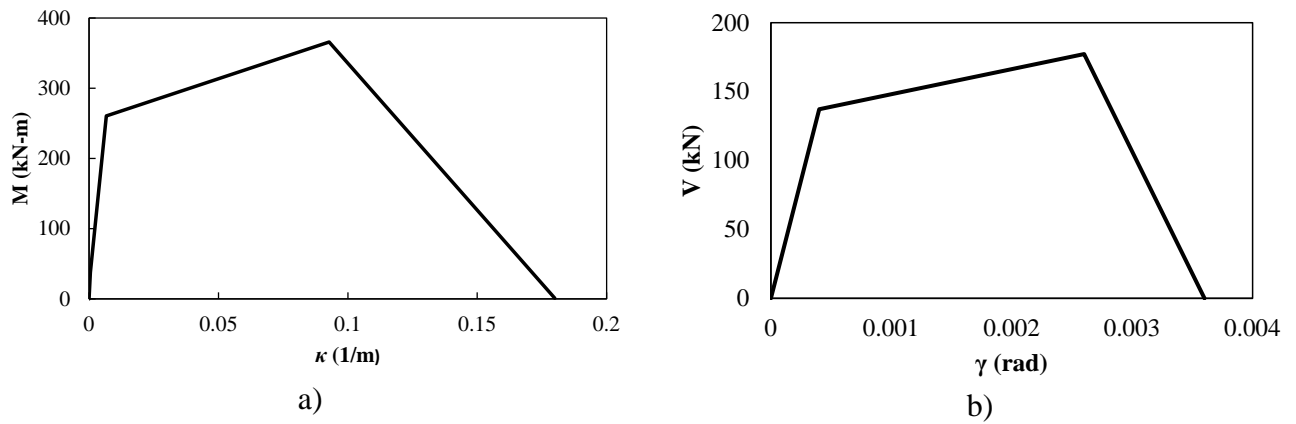
#### 5.1.4 Viga en voladizo sujeta a carga vertical con deformación por cortante



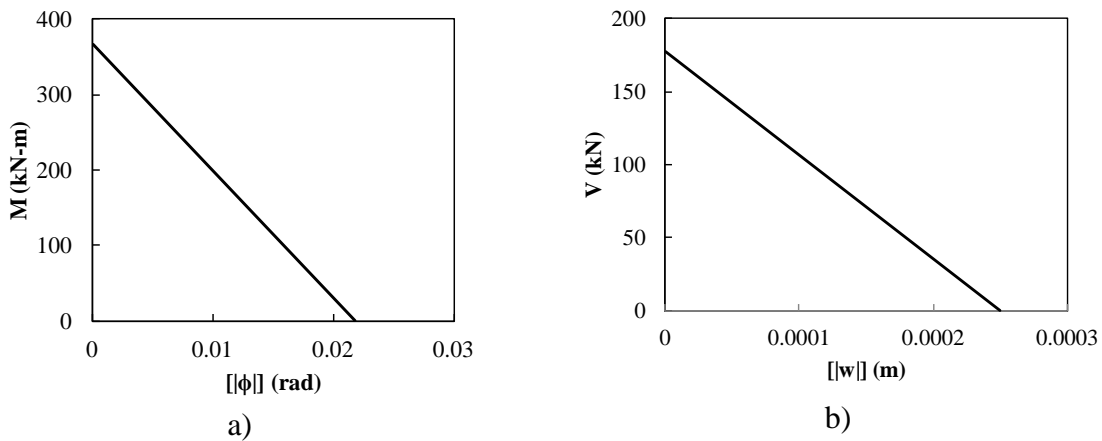
**Figura 5.12** a) Geometría y carga, b) sección transversal reforzada.

En este ejemplo se analiza la misma viga en voladizo de los ejemplos anteriores con longitud  $L = 2.5 \text{ m}$  y carga en el extremo de acuerdo a la Figura 5.12a. La sección transversal se muestra en la Figura 5.12b, en la cual las propiedades mecánicas del concreto son: módulo de Young  $E_c = 40 \text{ GPa}$ , esfuerzo de máximo de compresión  $f'_c = 44.9 \text{ MPa}$ ; y las del acero de refuerzo para acero longitudinal y transversal: módulo de Young  $E_s = 200 \text{ GPa}$  y esfuerzo de fluencia  $f_y = 400 \text{ MPa}$ . El acero longitudinal superior e inferior está compuesto por cinco barras de acero del número 5, y el refuerzo transversal por un estribo del acero número 3 a  $d/2$ , donde  $d$  es la altura efectiva de la sección.

Los comportamientos constitutivos para momento contra curvatura, y cortante contra deformación por cortante se muestran respectivamente en la Figura 5.13 a y b; los comportamientos discretos de momento contra salto de rotación y cortante contra salto del desplazamiento transversal se muestran en la Figura 5.14a y b, respectivamente. El ejemplo se desarrolla para vigas-columnas gruesas y delgadas, en los que se impone gradualmente el desplazamiento,  $v$ , en el extremo libre y se determinan las reacciones de fuerza,  $P$ , en el extremo libre y el momento,  $M$ , en el apoyo.



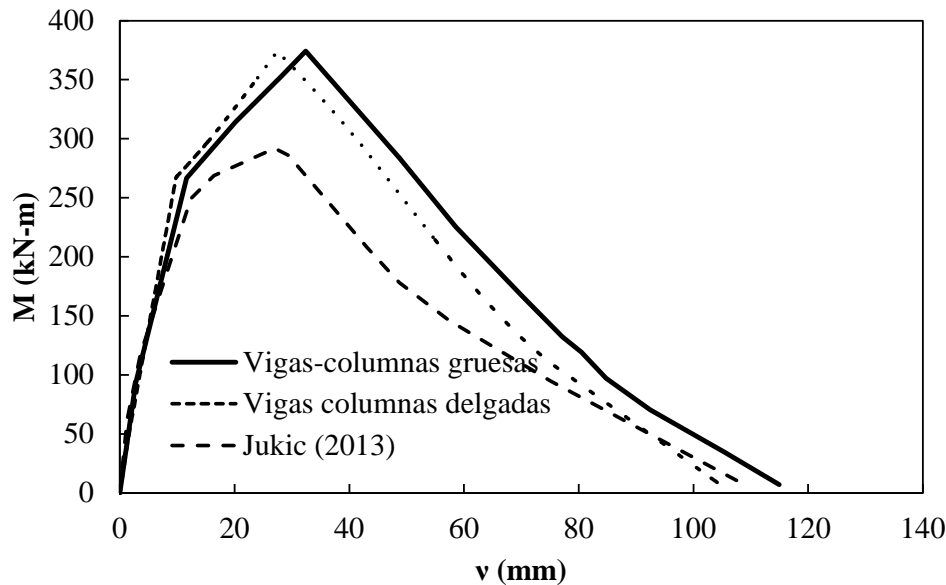
**Figura 5.13 Comportamientos a) momento contra curvatura; b) cortante contra deformación por cortante.**



**Figura 5.14 Comportamientos constitutivos discretos: a) momento contra salto de rotación, b) cortante contra salto del desplazamiento transversal.**

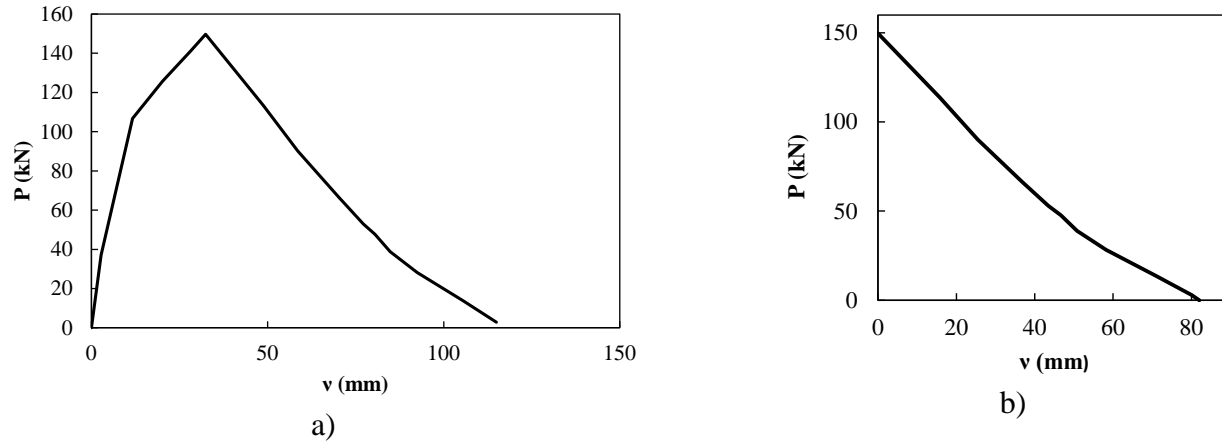
La Figura 5.15 muestra las curvas obtenidas con elementos viga-columna gruesa y delgada, las cuales se comparan con la obtenida por Jukic (2013), quien realizó este ejemplo mediante la teoría de vigas Timoshenko, en las que se observan diferencias entre estas

aproximaciones. Los resultados obtenidos con los elementos viga-columna gruesa y delgada mantienen relación con el comportamiento constitutivo momento-curvatura, con pequeñas diferencias entre ellos debido a que la formulación del elemento viga-columna gruesa considera la energía de deformación por cortante. Se observa que en el intervalo elástico ambos comportamientos son semejantes debido a que la relación  $h/L = 0.20$  se encuentra en el límite entre vigas gruesas y delgadas; sin embargo, en el comportamiento inelástico estas difieren puesto que la deformación inelástica por cortante toma importancia.

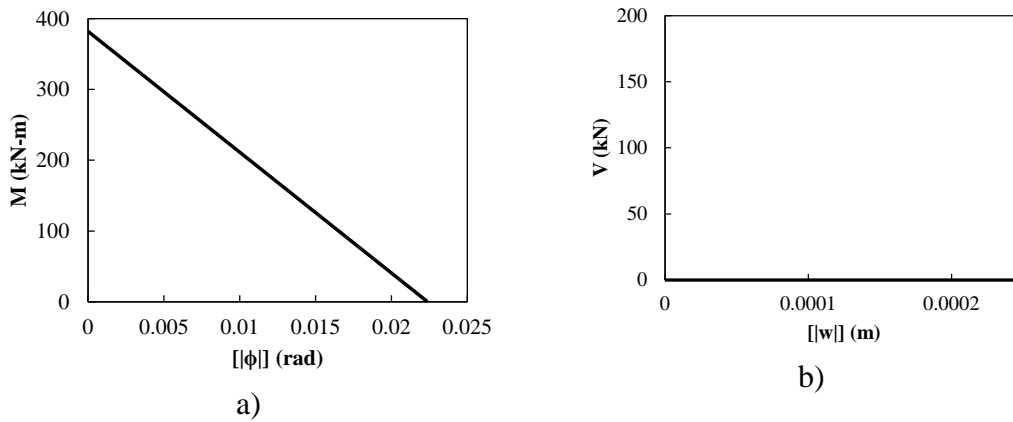


**Figura 5.15 Momento contra desplazamiento ( $v$ )**

La Figura 5.16a, muestra la variación de la fuerza  $P$  respecto a los desplazamientos,  $v$ , en la que se observa que no se alcanza el cortante último,  $V_u$ , lo cual evidencia que no se forma la discontinuidad por cortante. En la Figura 5.16b se muestra la curva del comportamiento de la fuerza  $P$  en la discontinuidad con la que se obtiene el trabajo efectuado en el intervalo del salto en rotación, la cual es igual a la energía disipada,  $G_f = 4.52 kN \cdot m$ , en la articulación formada en el apoyo de la viga. La Figura 5.17 a y b, muestra la variación del momento y el cortante en la discontinuidad, en la cual se observa que no hubo discontinuidad en el desplazamiento transversal  $w$ .



**Figura 5.16 Curvas: a) carga contra desplazamiento  $v$  y b) carga  $P$  contra desplazamiento  $v$  en el intervalo del salto en la discontinuidad por rotación.**

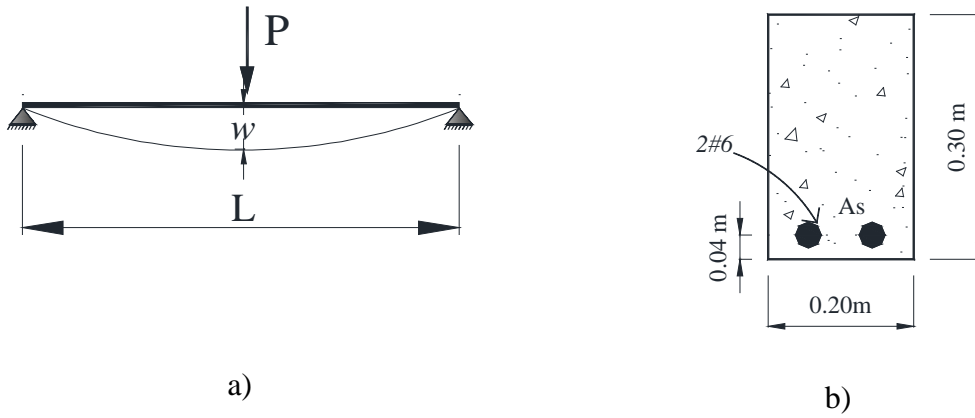


**Figura 5.17 Variación en la discontinuidad de: a) momento contra salto de rotación, b) cortante contra salto en desplazamiento por cortante.**

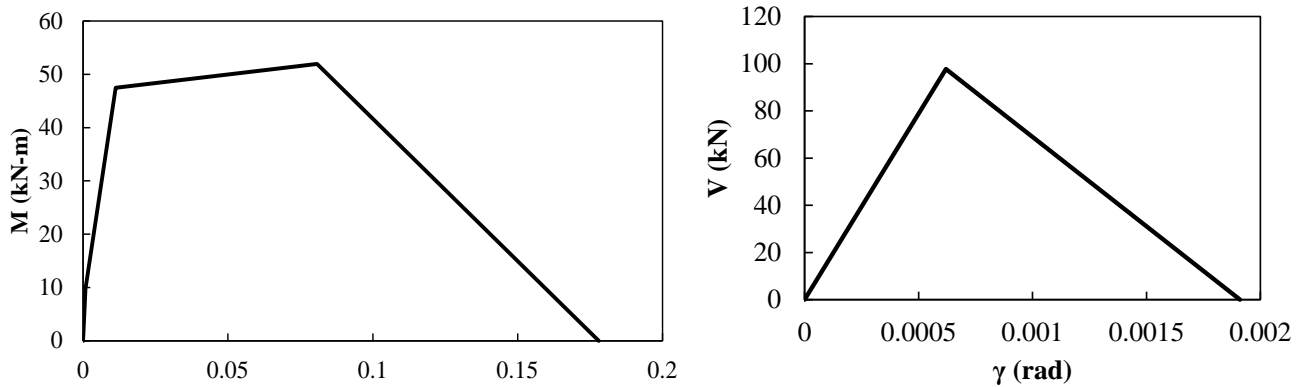
### 5.1.5 Viga simplemente apoyada

En este ejemplo se estudió una viga con longitud  $L=1.20$  m probada experimentalmente por Ikegawa *et al.* (2009), a la cual se le aplicó una fuerza en el centro del claro, como se muestra en la Figura 5.18a. La viga tiene una sección transversal simplemente reforzada con dos barras del acero número 6 en la parte inferior, como se muestra en la Figura 5.18b. Las propiedades mecánicas del concreto son: módulo de Young  $E_c=31.5$  GPa y esfuerzo último a compresión  $f'_c=32.5$  MPa. Las propiedades mecánicas del acero son: módulo de Young  $E_s=177$  GPa y esfuerzo a la fluencia  $f_y=359$  MPa. Con las propiedades mecánicas de los materiales se determinaron los comportamientos constitutivos mostrados en la Figura 5.19. Los comportamientos constitutivos discretos para momento contra salto de rotación y

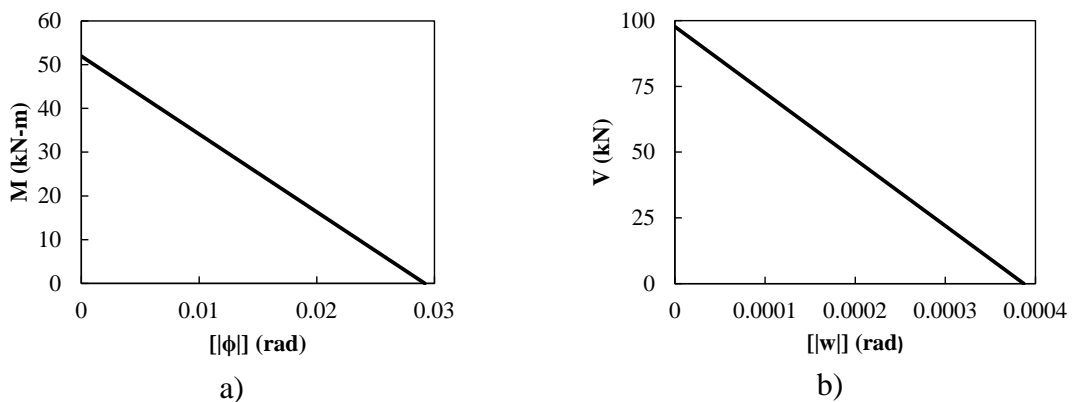
cortante contra salto de desplazamiento transversal se muestran respectivamente en la Figura 5.20 a y b.



**Figura 5.18** Viga sometida a prueba de cortante: a) geometría y b) sección transversal

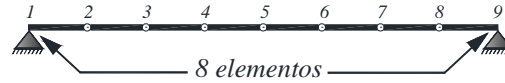


**Figura 5.19** Comportamientos constitutivos: a) momento-curvatura y b) cortante-deformación por cortante.

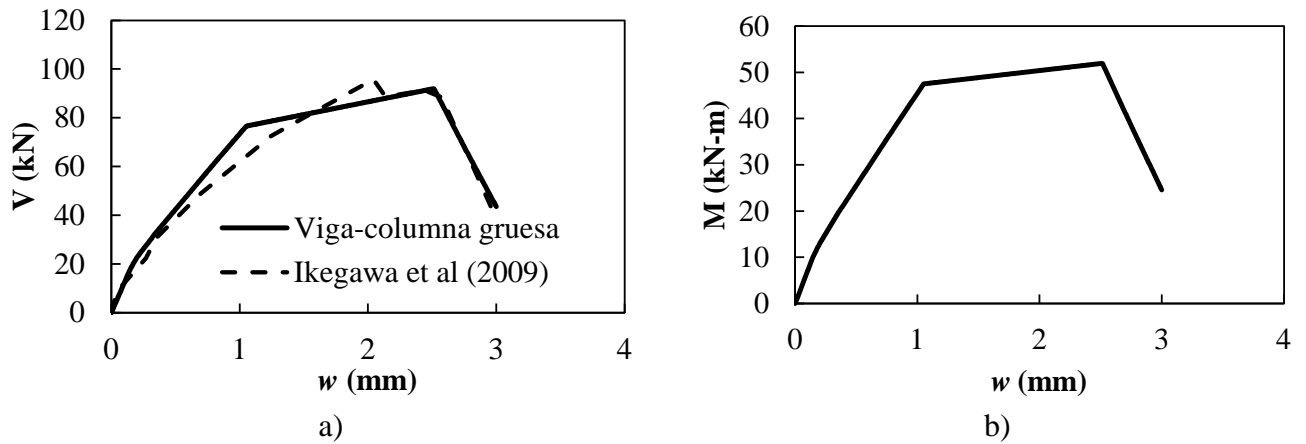


**Figura 5.20** Comportamientos constitutivos discretos: a) momento contra salto de rotación, b) cortante contra salto de desplazamiento transversal.

La viga se discretizó en ocho elementos de 15 centímetros cada uno, como se muestra en la Figura 5.21, en los que se utilizó el elemento viga-columna gruesa porque la relación  $h/L > 0.2$ , y para su análisis se impusieron gradualmente desplazamientos verticales,  $w$ , en el centro de la viga, donde se determinó la carga  $P$ . Las curvas cortante contra desplazamiento y momento contra desplazamiento, ambos en el centro del claro, se muestran respectivamente en las Figura 5.22 a y b, donde se observa que la curva experimental es congruente con la solución numérica.



**Figura 5.21 Discretización de la viga.**



**Figura 5.22 Resultados en el nodo 5 (centro de la viga): a) cortante-desplazamiento y b) momento-desplazamiento**

## 5.2 Discontinuidades en marcos

### 5.2.1 Marco de dos niveles

El marco de dos niveles, mostrado en la Figura 5.23a, tiene un claro con una longitud de  $3.5\text{ m}$  y altura de  $2.0\text{ m}$  en cada nivel. Las secciones transversales y acero de refuerzo de las columnas y vigas se muestran en la Figura 5.23b. Este marco fue modelado por Jukic (2013) utilizando elementos vigas con discontinuidades en la rotación, en el que discretizó las vigas y columnas en elementos de 25 centímetros de longitud. El concreto tiene las propiedades mecánicas siguientes: módulo de Young  $E_c = 28.6\text{ GPa}$  y esfuerzo último a compresión  $f'_c = 30\text{ MPa}$ . El acero tiene como propiedades mecánicas: módulo de Young  $E_s = 192.5\text{ GPa}$  y esfuerzo de fluencia  $f_y = 418\text{ MPa}$ . Ambas secciones transversales, viga y columna, tienen área de acero longitudinal  $A_s = 11.36\text{ cm}^2$  en la parte superior e inferior. Con estas propiedades se determinaron los comportamientos constitutivos para flexión y fuerza normal, mostrados en la Figura 5.24 a y b, respectivamente. Los comportamientos

constitutivos discretos para saltos en la discontinuidad de rotación y desplazamiento axial se muestran en la Figura 5.25.

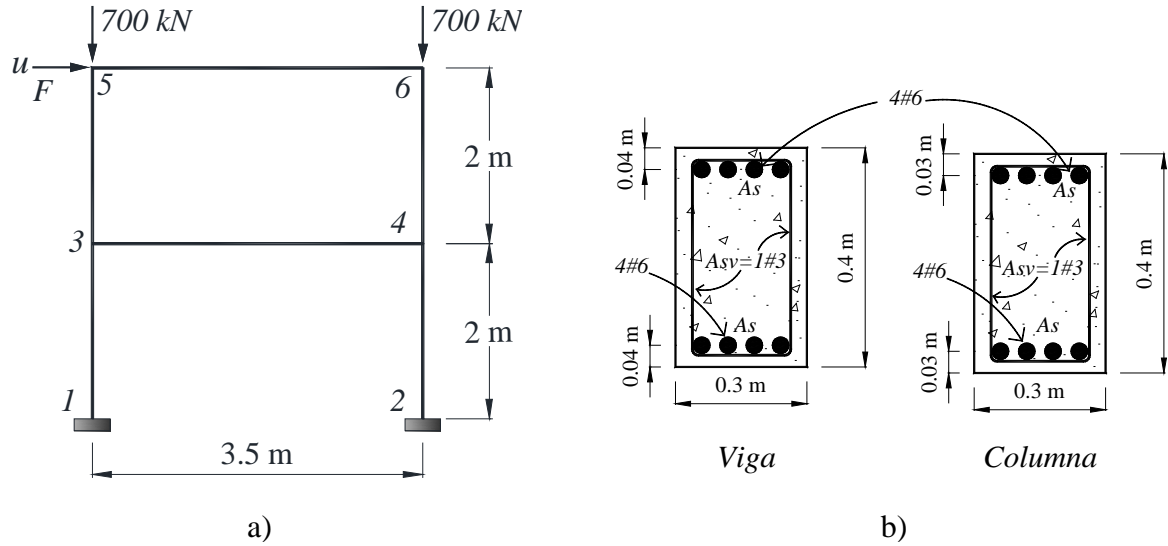


Figura 5.23 a) marco estructural y b) detalle de las secciones transversales

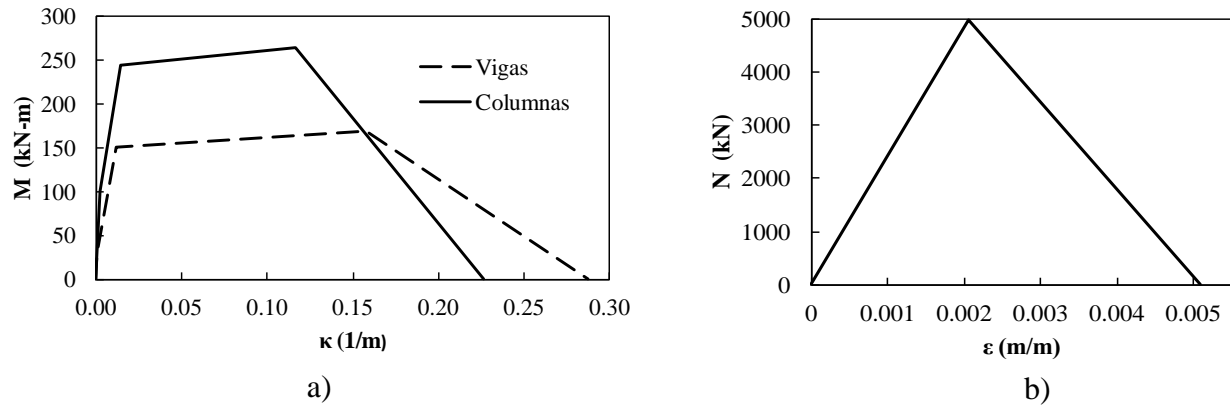
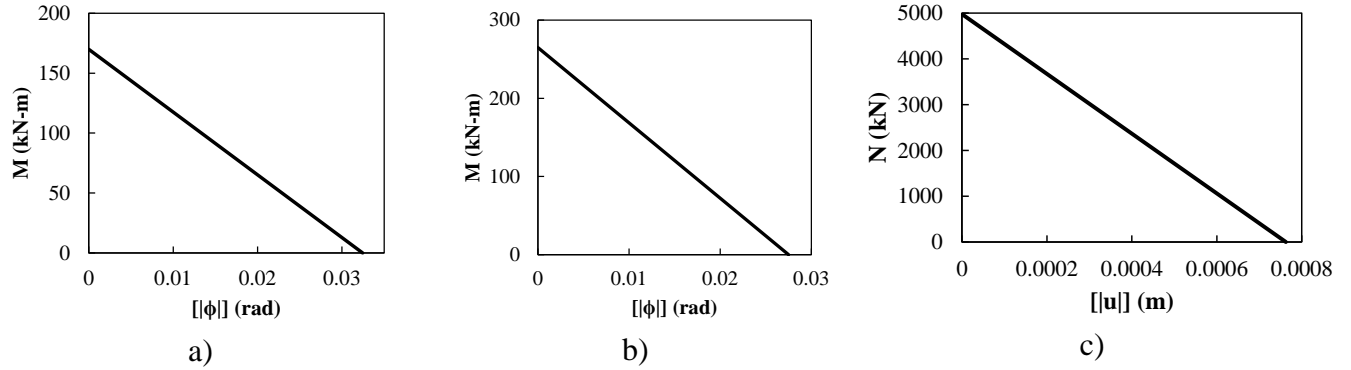
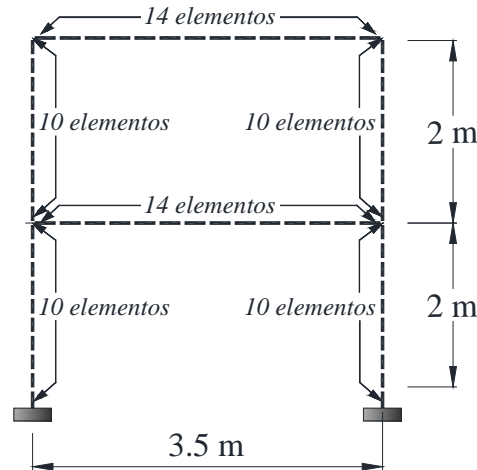


Figura 5.24 Comportamiento constitutivo: a) momento-curvatura y b) normal-deformación axial



**Figura 5.25 Comportamientos constitutivos contra salto en la discontinuidad por: a) momento-rotación de vigas, b) momento-rotación de columnas y c) fuerza normal-desplazamiento axial.**

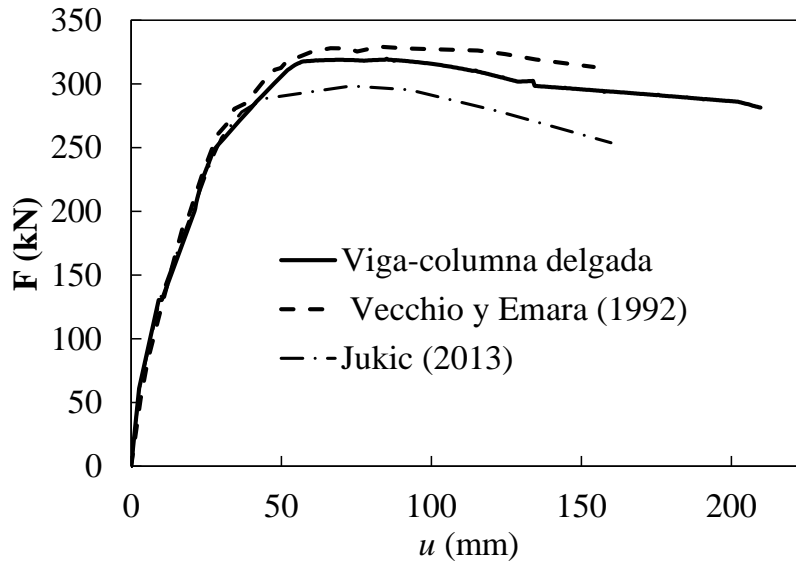
Las columnas y las vigas del marco se discretizaron con elementos viga-columna delgada de veinte y veinticinco centímetros de longitud, respectivamente, como se muestra en la Figura 5.26. Para la solución numérica del marco, primeramente se aplicaron y se mantuvieron constantes las cargas verticales de  $700 \text{ kN}$  en los nodos 5 y 6 las cuales provocan fuerzas de compresión en las columnas; posteriormente se impuso gradualmente un desplazamiento horizontal hacia la derecha en el nodo 5.



**Figura 5.26 Discretización del marco.**

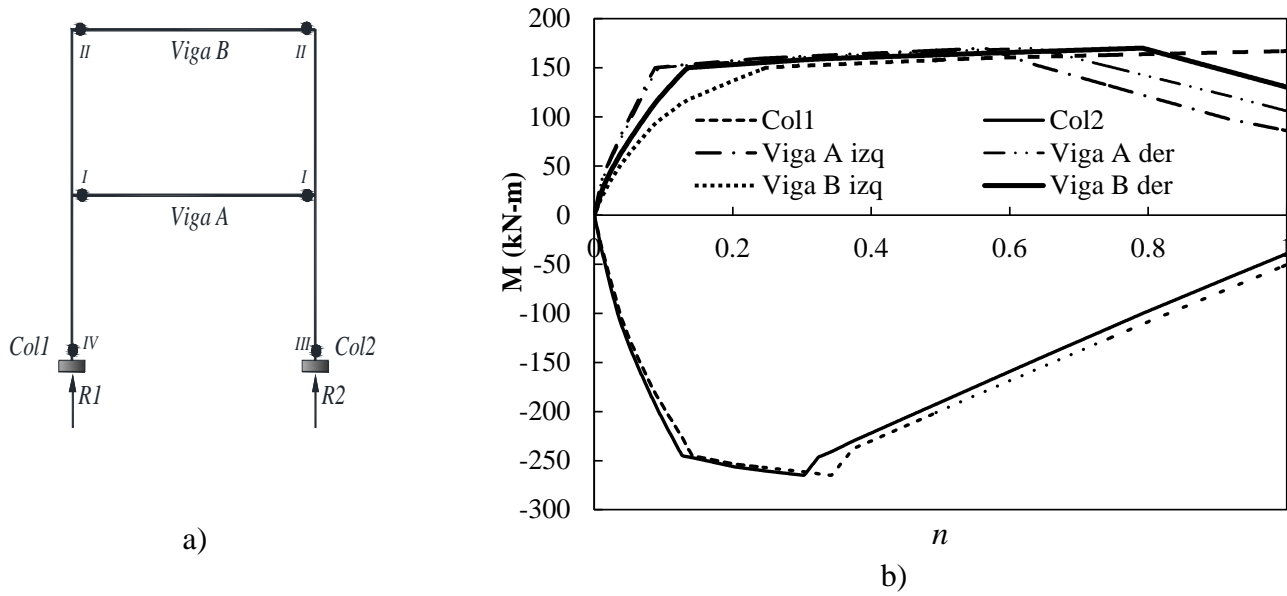
La Figura 5.27 muestra la curva calculada fuerza,  $F$ , contra desplazamiento,  $u$ , la cual se compara con la solución experimental reportada por Vecchio y Emara (1992) y la solución numérica reportada por Jukic (2013). En la rama ascendente, el comportamiento de las tres curvas es semejante. Sin embargo, en la meseta existe una diferencia mayor entre la curva experimental y la obtenida por Jukic (2013), que con la curva obtenida con el elemento viga-columna con discontinuidades desarrollada en este trabajo.





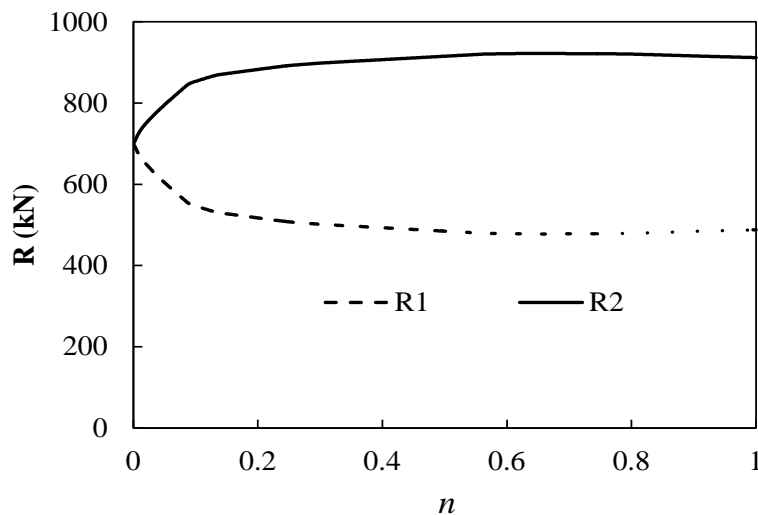
**Figura 5.27** Carga,  $F$ , contra desplazamiento,  $u$ .

Se observó que los elementos finitos en los extremos de las vigas y base de las columnas desarrollaron los valores máximos de elementos mecánicos, y la secuencia de formación de articulaciones se muestra en la Figura 5.28a, donde simultáneamente ocurren dos articulaciones en los extremos de la viga del primer nivel, posteriormente ocurren otras dos articulaciones en los extremos de la viga del segundo nivel. Después ocurre una articulación en la parte inferior de la columna derecha, finalmente, ocurre una articulación en la parte inferior de la columna izquierda. En la Figura 5.28b se muestra la variación del momento contra el incremento de carga normalizado de los puntos donde ocurrió cada una de las articulaciones.



**Figura 5.28 Articulaciones: a) secuencia de ocurrencia y b) variación del momento.**

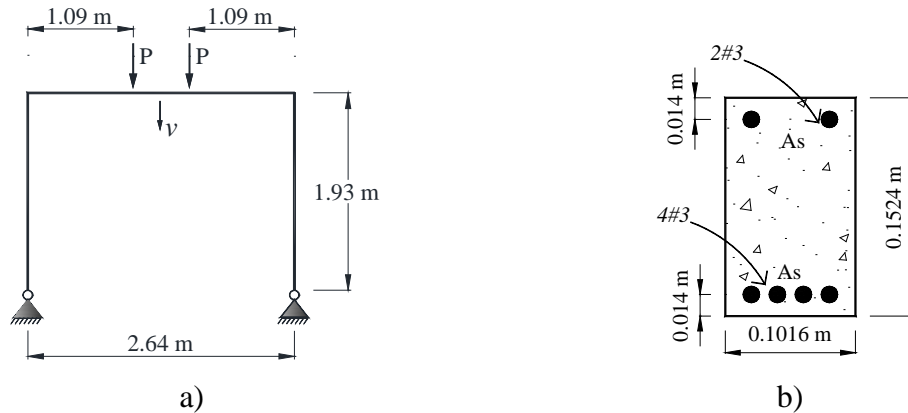
La Figura 5.29 muestra la variación de las magnitudes de las reacciones verticales  $R_1$  y  $R_2$  de los apoyos, donde se presentan las fuerzas axiales con mayor magnitud y donde se examinó la ocurrencia del daño por momento flexionante y fuerza normal. Como se esperaba, los elementos mecánicos en las columnas no presentaron tensión en ningún instante, debida a la acción constante de las fuerzas compresivas aplicadas verticalmente en la estructura. También se observa que la magnitud de fuerza a compresión máxima no excede la fuerza normal última de  $N_u=5000$  kN mostrada en la Figura 5.24b.



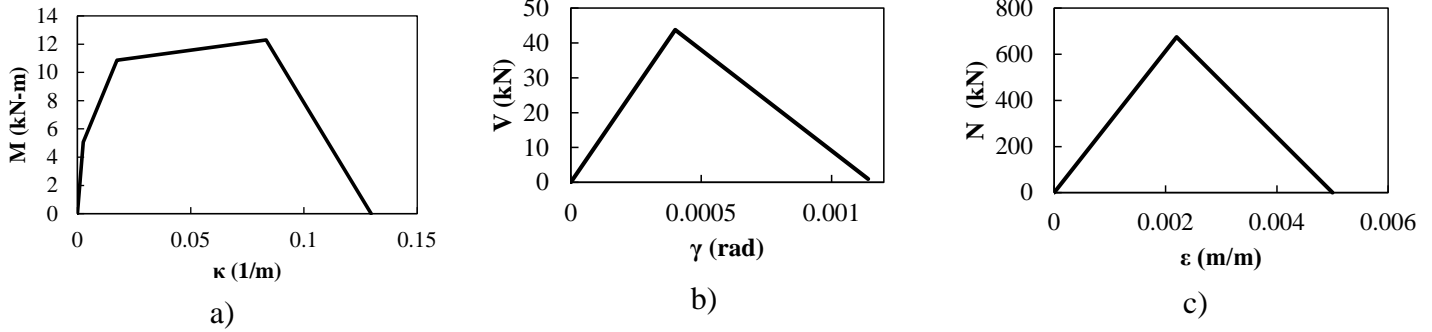
**Figura 5.29 Variación de la magnitud las reacciones  $R_1$  y  $R_2$ .**

### 5.2.2 Marco de un solo nivel

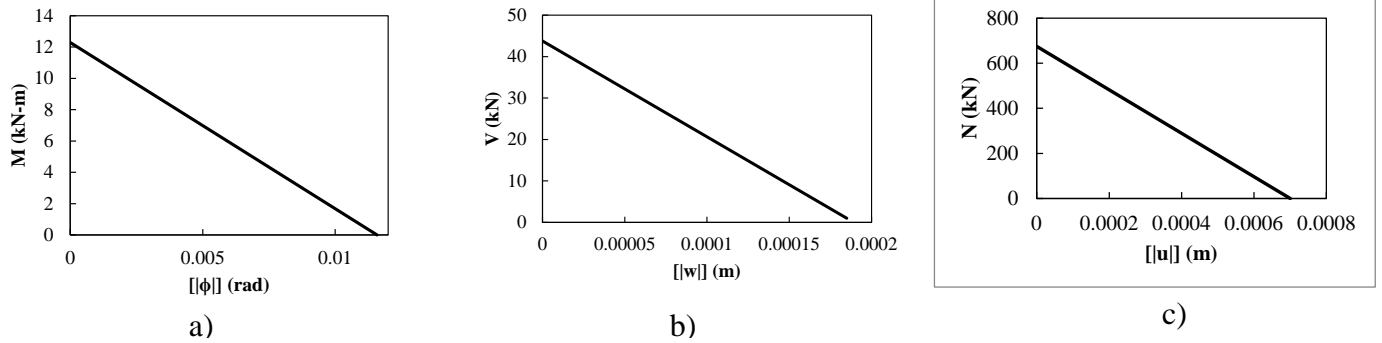
Se realizó el modelo numérico de una prueba experimental desarrollada por Cranston (1965), la cual consistió en un marco con un claro de  $2.64\text{ m}$  y altura de  $1.93\text{ m}$ ; que se sometió a dos carga verticales colocadas a una  $1.09\text{ m}$ , medida desde los extremos de la viga, como se muestra en Figura 5.30a. El marco tiene la misma sección transversal en la vigas y las columnas, la cual, la viga está reforzada de acero longitudinal con dos barras del acero número 3 en la parte superior y cuatro barras del acero número 3 en la parte inferior, para la columna las cuatro barras del acero número 3 están en el lado externo y las tres barras del acero número 3 del lado interno del marco, no se considera refuerzo transversal, como se muestra en la Figura 5.30b y se discretizó con elementos vigas-columnas gruesas con el propósito de comparar los resultados numéricos con los reportados por Jukic (2013), quién desarrolló este mismo marco discretizado con elementos vigas de Timoshenko con discontinuidades. Las propiedades mecánicas del concreto son: módulo de Young  $E_c=31.5\text{ GPa}$  y esfuerzo último a compresión  $f'_c=36.5\text{ MPa}$ . Las propiedades del acero son: módulo de Young  $E_s=200\text{ GPa}$  y esfuerzo a la fluencia  $f_y=293\text{ MPa}$ . Los comportamientos constitutivos del momento, cortante y fuerza axial se muestran en la Figura 5.31, donde se observa que el comportamiento constitutivo cortante contra deformación transversal es bilineal debido a que es un elemento sin refuerzo transversal. Los comportamientos constitutivos discretos para momento, cortante y fuerza normal, para las discontinuidades de rotación, desplazamiento transversal y axial, respectivamente, se muestran en la Figura 5.32.



**Figura 5.30 a) geometría del marco y b) sección transversal para columnas y viga**

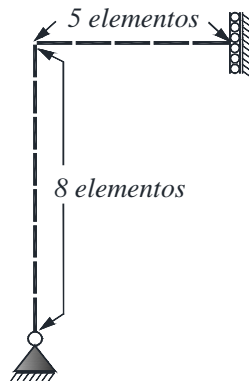


**Figura 5.31 comportamiento constitutivo: a) momento-curvatura, b) cortante-deformación y c) normal-deformación axial.**



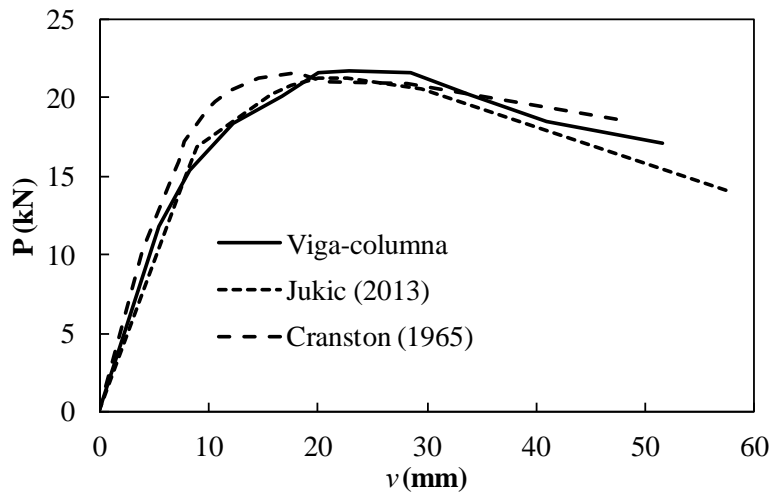
**Figura 5.32 Comportamientos constitutivos discretos en el salto de: a) momento contra rotación, b) cortante contra desplazamiento transversal y c) fuerza axial contra desplazamiento axial.**

Se aprovechó la simetría geométrica y de cargas, por lo que se discretizó la mitad del marco, y en el nodo del eje de simetría se colocaron restricciones al desplazamiento horizontal y a la rotación. El modelo se discretizó con 13 elementos viga-columna gruesa, divididos en cinco elementos de 0.264 m para la viga y ocho elementos de 0.242 m para la columna, como se muestra en la Figura 5.33.

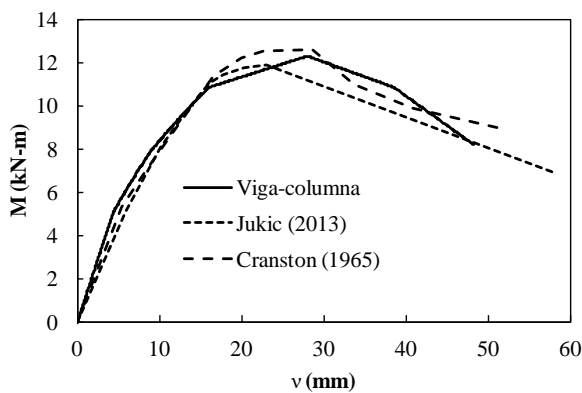


**Figura 5.33 Discretización y condiciones de frontera del modelo numérico.**

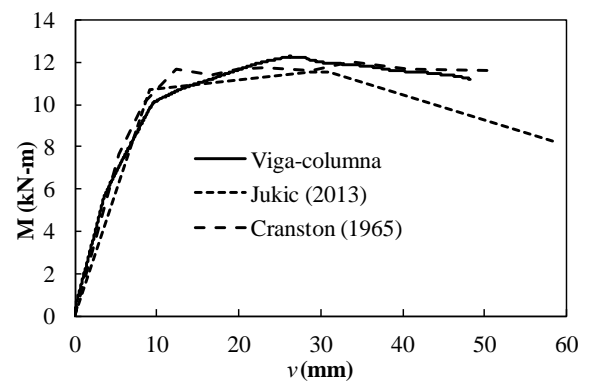
La Figura 5.34 muestra la variación de la fuerza  $P$  contra los desplazamientos verticales,  $v$ , en el centro de la viga. Las curvas obtenidas numéricamente del momento flexionante contra el desplazamiento vertical,  $v$ , en la conexión de la viga a la columna y el eje de simetría se muestran respectivamente en la Figura 5.35 a y b, las cuales se comparan con los obtenidos experimentalmente por Cranston (1965) y numéricamente por Jukic (2013), en las que se observa congruencia en las tres soluciones. La secuencia de aparición de las articulaciones se muestra en la Figura 5.36, generándose la primera en el centro de la viga y, posteriormente, en la intersección con la columna.



**Figura 5.34 Comportamiento  $P$  contra  $v$**

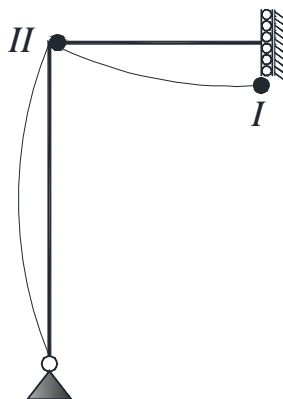


a)



b)

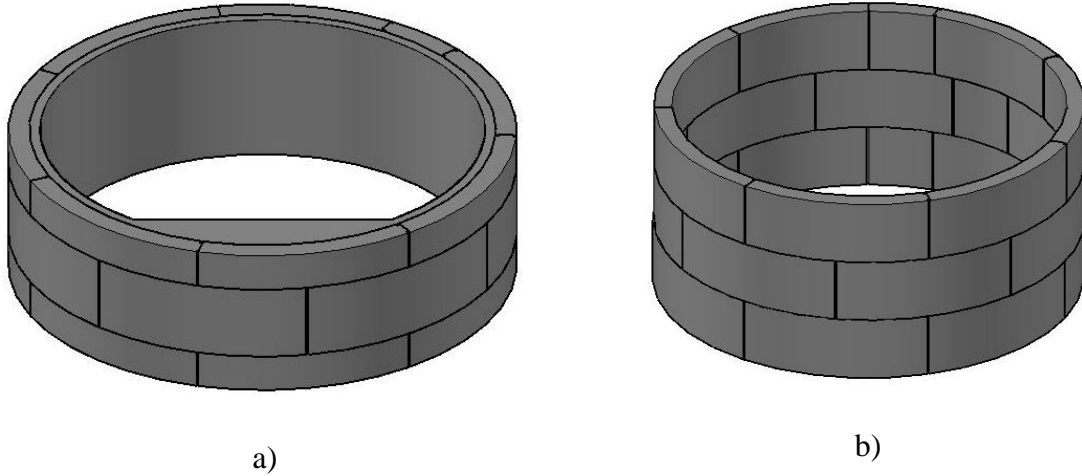
**Figura 5.35 Momento contra desplazamiento  $v$ : a) conexión viga-columna y b) centro de la viga**



**Figura 5.36 Secuencia de articulaciones**

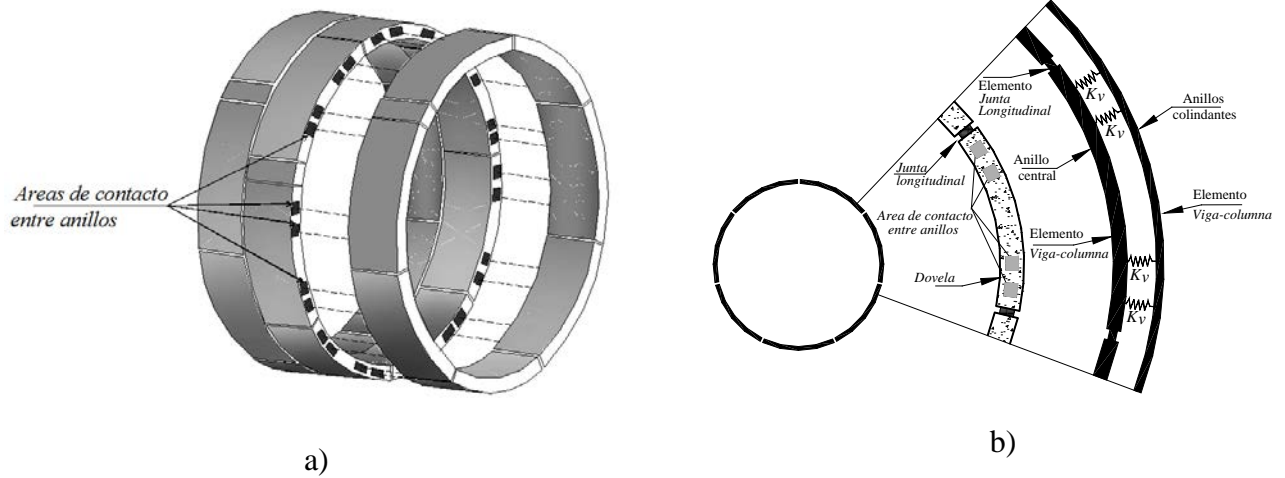
### 5.3 Discontinuidades en túneles dovelados

Se desarrollan dos modelos numéricos que simulan los ensayos realizados a dos estructuras de túneles construidos con anillos dovelados a escala real. El primer modelo es una prueba experimental realizada en México, que consistió en una estructura formada por un anillo central completo con medio anillo colocado en la parte superior e inferior, respectivamente, con revestimiento secundario como se muestra en la Figura 5.37a, de acuerdo con Aguilar *et al.* (2011), identificado en este trabajo como túnel A; inicialmente, se simuló la prueba para reproducir los resultados experimentales y con ello validar la capacidad del elemento viga-columna gruesa, luego se aplicaron cargas adicionales para determinar el mecanismo de falla en el túnel. El segundo modelo, definido como túnel B, consiste de tres anillos completos de dovelas que fueron ensayados en Holanda como se muestra en la Figura 5.37b, según Blom y van Oosterhout (2001).



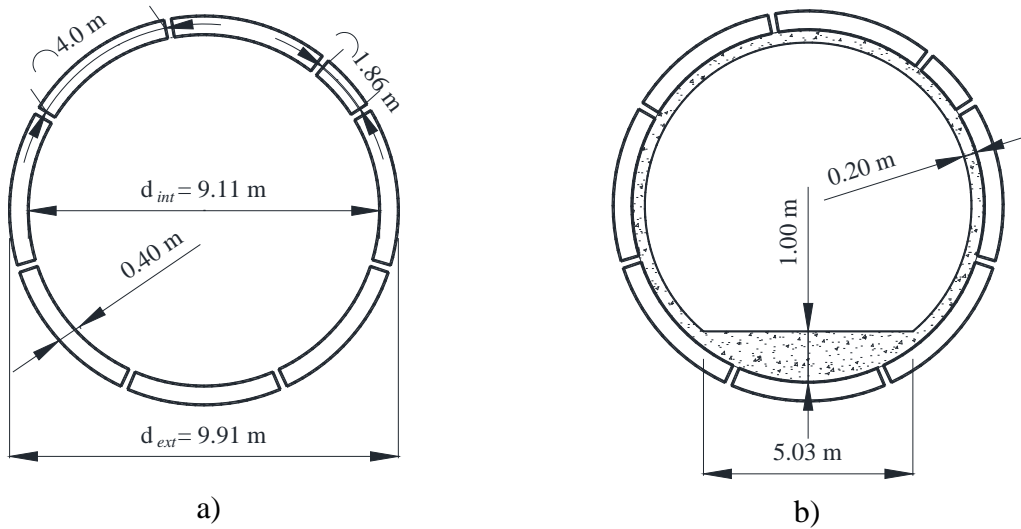
**Figura 5.37 Estructuras ensayadas adaptadas de: a) Aguilar *et al.* (2011) y b) Blom y van Oosterhout (2001).**

En ambos túneles se considera la interacción entre los anillos dovelados, los cuales están conectados entre sí mediante el contacto de placas de madera contrachapada, como se muestra en la Figura 5.38a. La interacción se representa mediante resortes axiales que simulan la capacidad de fuerza cortante que se desarrolla producto de la aplicación de una fuerza axial longitudinal al eje del túnel. La rigidez que representa el contacto de las piezas de maderas contrachapadas se calcula con la ec. (3.50), cuyas variables son: el módulo de rigidez a cortante de la madera contrachapada  $G_w$ , el espesor de las piezas  $t$  y el área de contacto de la interfaz  $A_w$ . Gijsbers y Hordijk (1997) proponen un coeficiente de fricción entre 0.30 y 0.53 para la interfaz de la madera contrachapada localizada entre la junta transversal entre anillos, con el cual se obtiene el cortante máximo con la ecuación  $V = \mu N$ , donde  $N$  es la fuerza normal aplicada a los anillos, en dirección longitudinal al eje del cilindro. La Figura 5.38b muestra la interacción de la interfaz de madera contrachapada, a través del resorte con rigidez a cortante  $K_v$ .



**Figura 5.38 a) conexión entre anillos b) elementos del modelo numérico**

#### 5.3.1.1 Túnel A

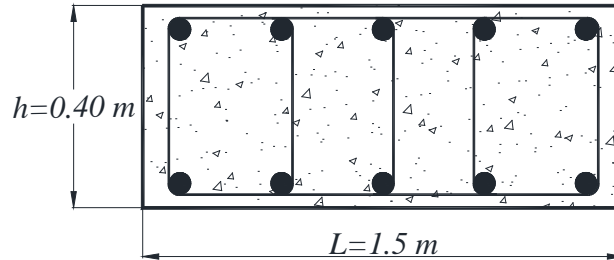


**Figura 5.39 Geometría del túnel A en la etapa: a) Solo dovelas y b) con revestimiento secundario.**

El túnel A, cuyo experimento fue realizado por ICA (Ingenieros Civiles Asociados) y reportado por Aguilar *et al.* (2011), está formado por siete dovelas de longitud de arco de 4.0 m, más una cuña de 1.86 m, como se muestra en la Figura 5.39a, de sección transversal con ancho  $L=1.50 \text{ m}$ , altura  $h=0.40 \text{ m}$ , de acuerdo a la Figura 5.40 y, posteriormente, se le incorpora un revestimiento secundario mostrado en la Figura 5.39b; la dovela se reforzó simétricamente con acero longitudinal  $A_l=12.5 \text{ cm}^2$  en la parte superior e inferior y transversal  $A_t=2.85 \text{ cm}^2$ . La junta longitudinal, como se muestra en la Figura 3.21a, tiene un ancho  $b=1.39 \text{ m}$  y una altura  $a=0.17 \text{ m}$ . El diámetro interno del anillo dovelado es de

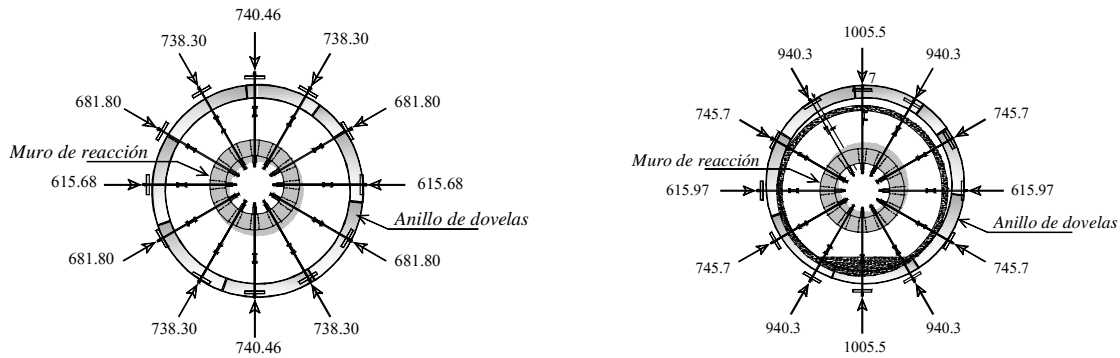


$d=9.11m$ . Las propiedades mecánicas del concreto son: módulo de Young  $E_s=21\text{ GPa}$  y el esfuerzo último a compresión  $f'_c=23.5\text{ MPa}$ . Las propiedades del acero de refuerzo son: módulo de Young  $E_s=200\text{ GPa}$  y  $f_y=412\text{ MPa}$ .



**Figura 5.40 Sección transversal del elemento de concreto reforzado**

El experimento realizado consistió en dos etapas. En la primera, la estructura formada solamente por anillos dovelados, mostrados en la Figura 5.39a, se sometió incrementalmente hasta las cargas máximas mostradas en la Figura 5.41a. En la segunda etapa, se aplicó un revestimiento secundario interno de aproximadamente un metro en el centro de la cubeta (parte inferior de mayor espesor) y veinte centímetros en el resto, como se muestra en la Figura 5.39b, una vez que el concreto alcanzó la capacidad de diseño, se incrementó la carga hasta los valores mostrados en la Figura 5.41b.

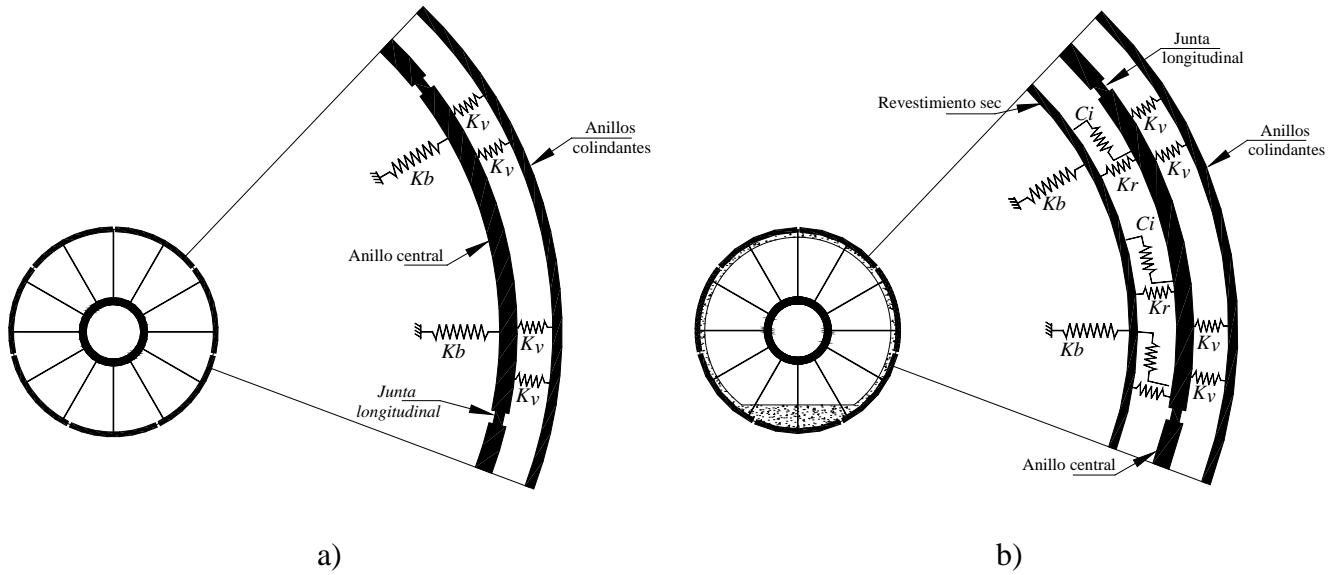


**Figura 5.41 Sistemas de cargas aplicadas en kN: a) primera etapa b) segunda etapa**

#### 5.3.1.1.1 Modelos numéricos

Los anillos se sujetan al muro de reacción circular interno mediante doce barras de presfuerzo distribuidas uniformemente, que son las que les transmiten la carga aplicada por los gatos y a la vez le proporcionan estabilidad a la estructura. La Figura 5.42 muestra la discretización del modelo numérico, que está compuesta de resortes  $K_b$ ,  $K_v$ ,  $K_r$  y  $C_i$  que representan respectivamente las rigideces de las barras de presfuerzo al muro de reacción, interfaz entre las placas de madera contrachapada entre los anillos, la interfaz radial y tangencial entre el revestimiento secundario y el anillo de dovelas. También muestra los

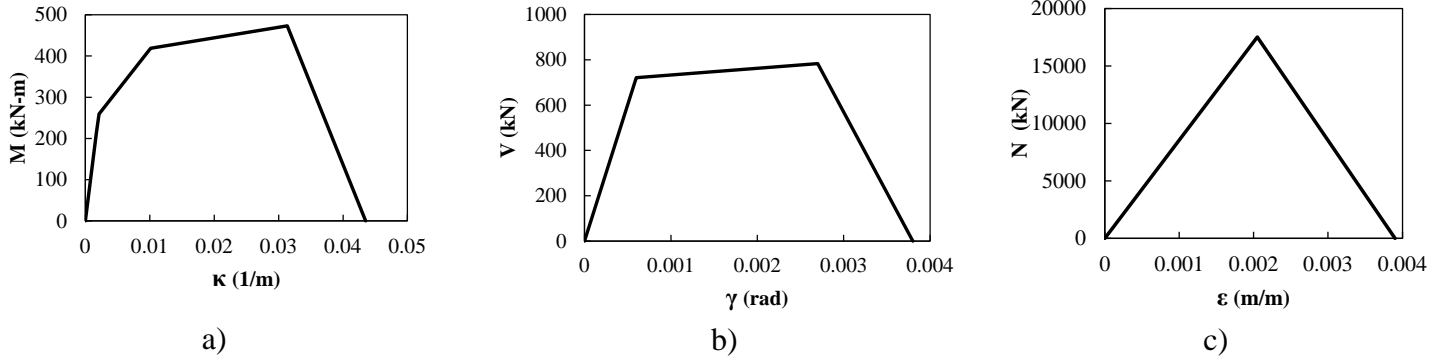
anillos del revestimiento secundario y dovelas, los cuales se discretizan con el elemento viga-columna gruesa con discontinuidades para analizar el posible daño por cortante. La junta longitudinal se discretizó con elementos vigas-columnas gruesas, a los que se les asignaron los comportamientos constitutivos obtenidos con sus propiedades mecánicas de acuerdo a la sección 3.5.



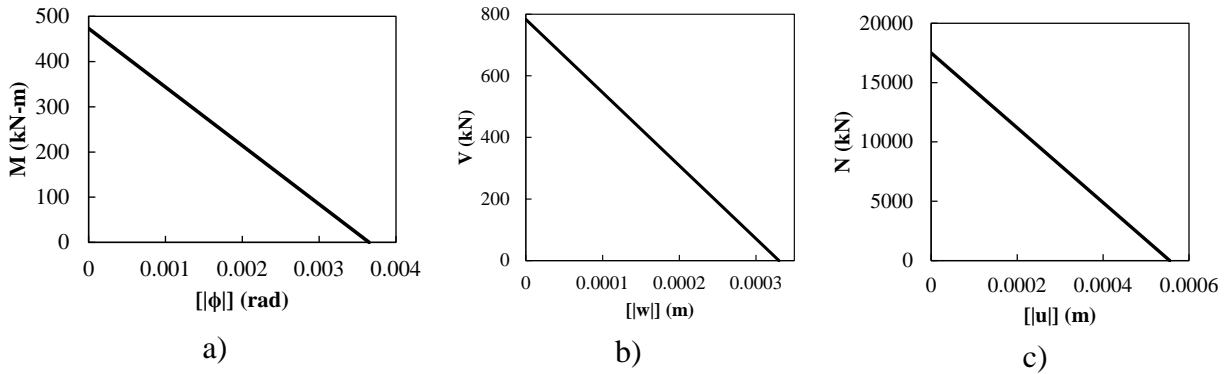
**Figura 5.42 Elementos del modelo numérico en la: a) primera etapa, y b) segunda etapa**

#### 5.3.1.1.2 Modelos constitutivos

Con las propiedades mecánicas, geométricas y refuerzos, se definen los modelos constitutivos para las dovelas para el comportamiento de momento, cortante y fuerza axial, mostrados en la Figura 5.43, que son utilizados en el elemento viga-columna que representa las dovelas. Estas curvas fueron construidas de acuerdo a las secciones 3.2, 3.3 y 3.4, respectivamente. Los comportamientos constitutivos discretos para momento, cortante y fuerza axial respectivamente se muestran en la Figura 5.44.

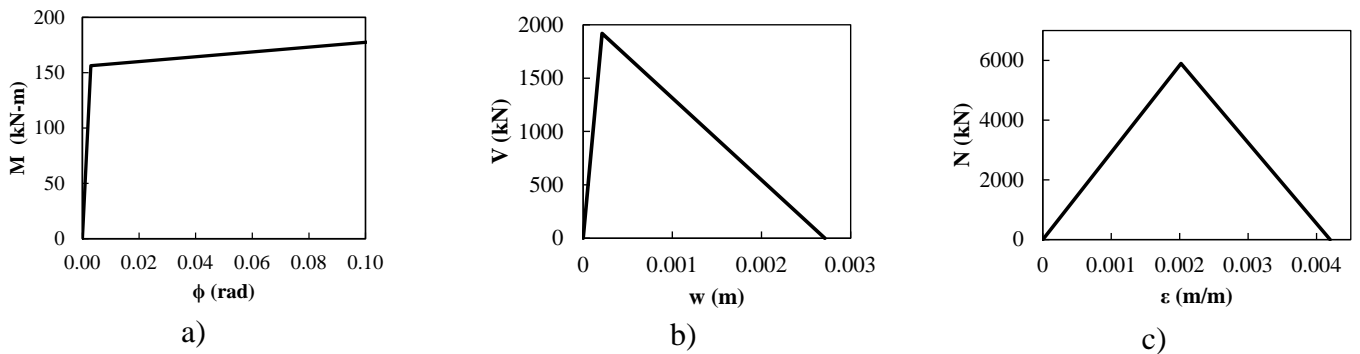


**Figura 5.43 Modelos constitutivos de las dovelas: a) momento-curvatura, b) cortante-deformación y c) fuerza normal-deformación axial**

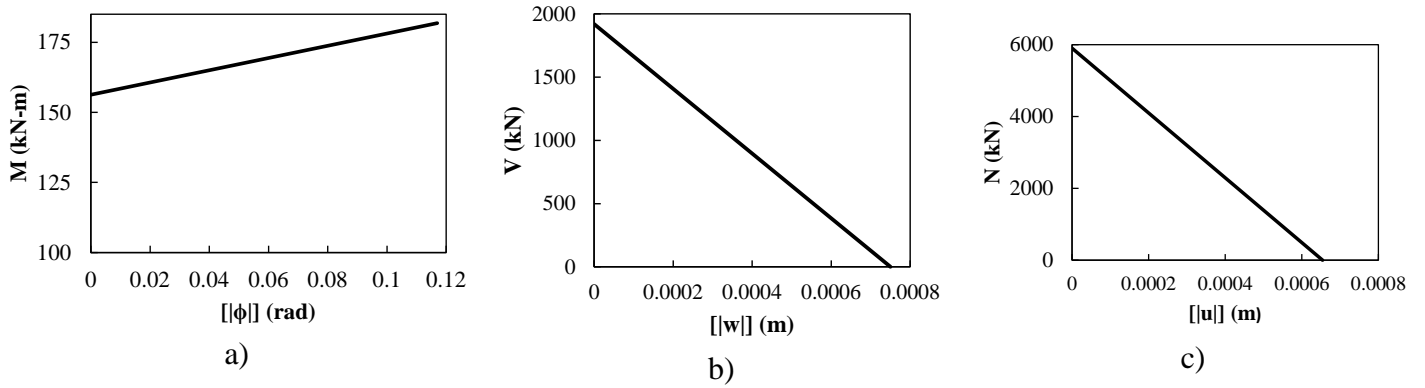


**Figura 5.44 Comportamientos constitutivos discretos de las dovelas para el salto de: a) momento contra rotación, b) cortante contra desplazamiento transversal y c) fuerza normal contra desplazamiento axial.**

La Figura 5.45 muestra los modelos constitutivos para la junta longitudinal formada por el contacto de las dovelas que forman el anillo, los cuales son desarrollados de acuerdo a la sección 3.5, y los comportamientos constitutivos discretos para momento, cortante y fuerza axial se muestran respectivamente en la Figura 5.46.

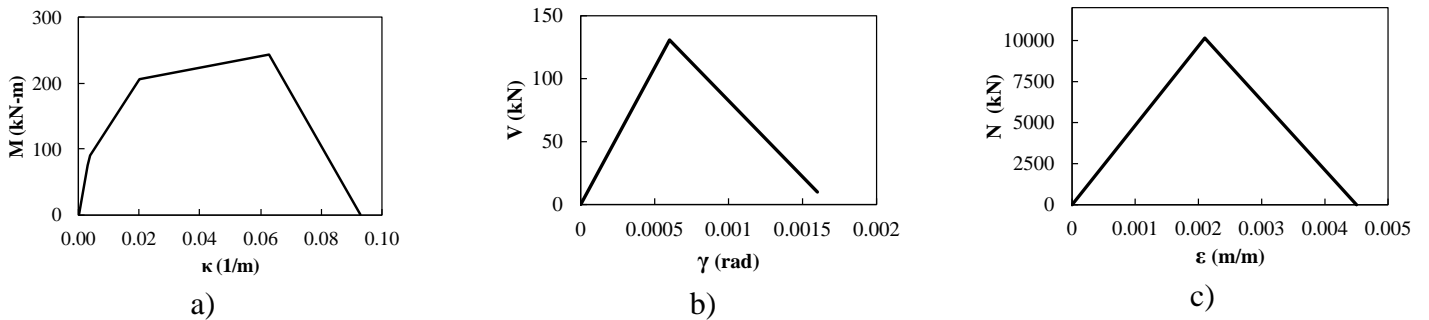


**Figura 5.45 Modelos constitutivos de la junta longitudinal de las dovelas: a) momento-rotación, b) cortante- desplazamiento y c) fuerza normal-deformación.**

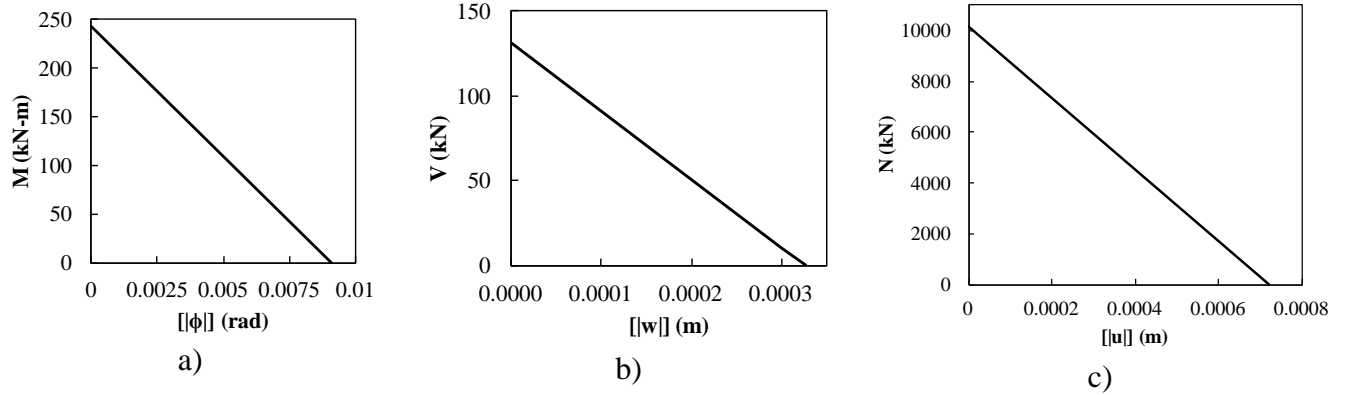


**Figura 5.46 Comportamientos constitutivos discretos en la junta longitudinal para el salto de: a) momento contra rotación, b) cortante contra desplazamiento por cortante y c) fuerza axial contra desplazamiento axial.**

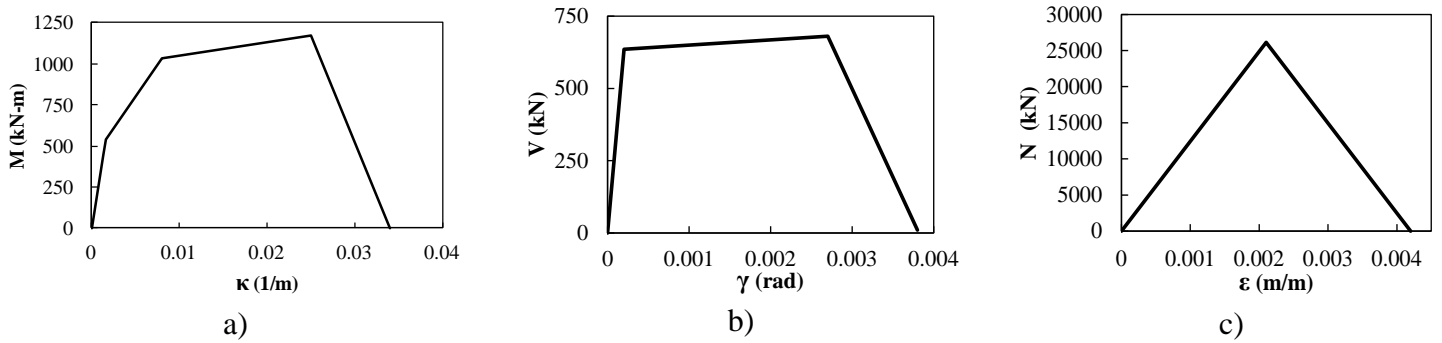
Las Figuras 5.47 y 5.49 muestran los modelos constitutivos del revestimiento secundario; la primera corresponde al espesor uniforme de veinte centímetros, en la cual no se considera refuerzo a cortante, y la última a la sección promedio de la cubeta. Los comportamientos constitutivos discretos para el revestimiento de veinte centímetros de espesor y la cubeta se muestran respectivamente en las Figuras 5.48 y 5.50.



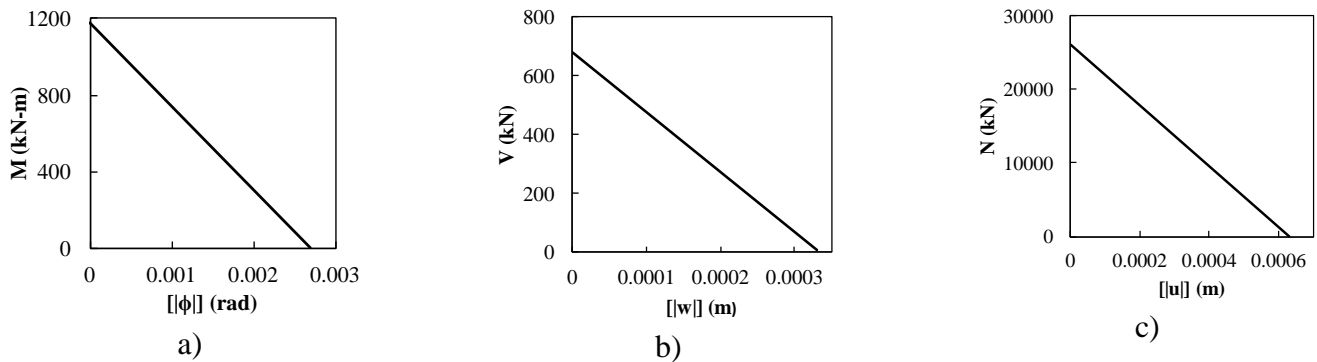
**Figura 5.47 Modelos constitutivos del revestimiento secundario: a) momento-curvatura, b) cortante-deformación y c) fuerza normal-deformación.**



**Figura 5.48 Comportamientos constitutivos discretos del revestimiento secundario de:**  
**a) momento contra salto de rotación, b) cortante contra salto de desplazamiento por**  
**cortante y c) fuerza normal contra salto de desplazamiento axial.**



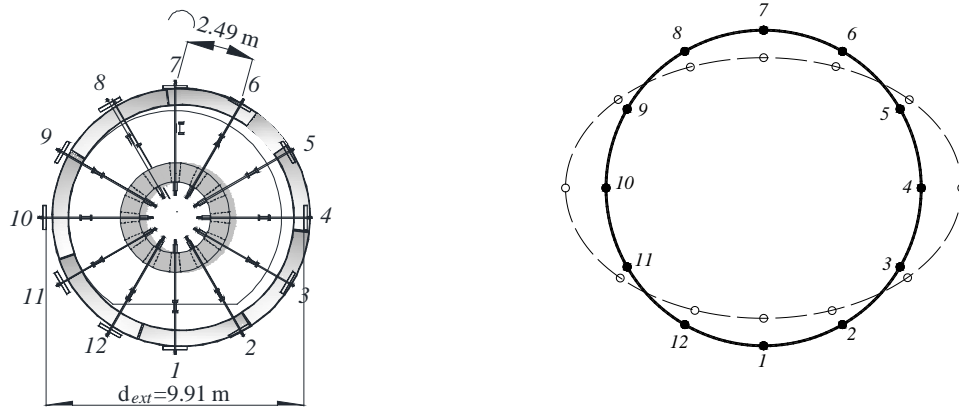
**Figura 5.49 Modelos constitutivos revestimiento secundario (cubeta): a) momento-**  
**curvatura, b) cortante-deformación y c) fuerza normal-deformación**



**Figura 5.50 Comportamientos constitutivos discretos en la cubeta: a) momento contra**  
**salto de rotación, b) cortante contra salto del desplazamiento transversal y c) fuerza**  
**normal contra salto en el desplazamiento axial.**

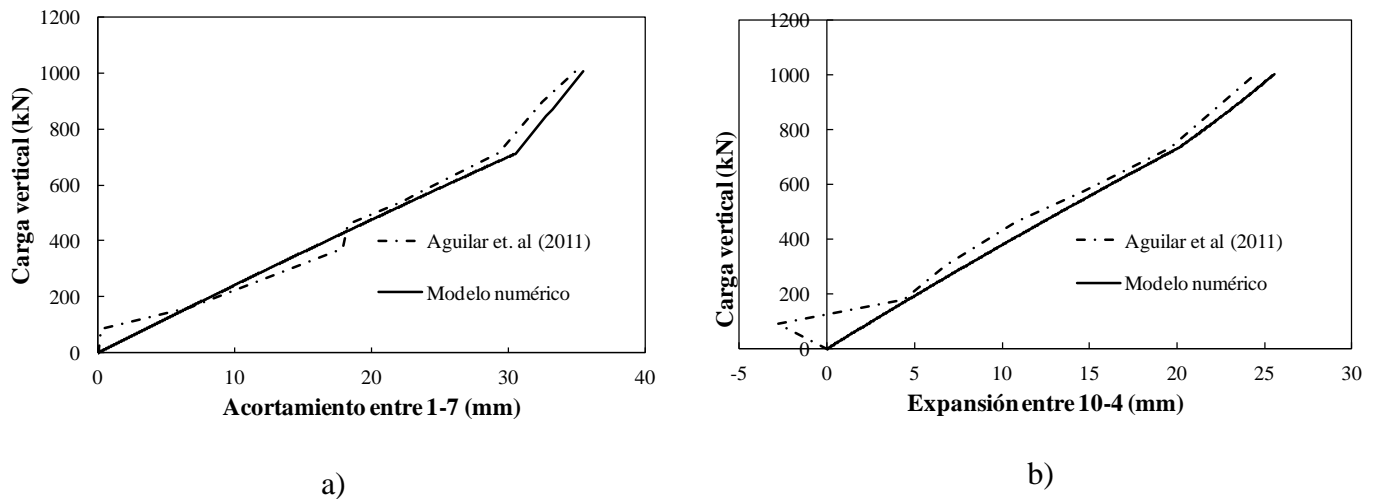
### 5.3.1.1.3 Resultados

En la prueba experimental se asignaron puntos de control para la medición de desplazamientos contra las fuerzas aplicadas, tal como se muestra en la Figura 5.51a. Una vez concluida, se obtuvieron los desplazamientos mostrados en la Figura 5.51b, donde se observa un acortamiento en el eje vertical que cruza por los puntos 1-7, mientras que el eje horizontal se observa una expansión de los puntos 10-4, debido a la ovalización producida por la distribución de fuerzas en las que se asignó un factor de empuje horizontal ( $K_o$ ) de 0.83 para la primera etapa y 0.61 en la segunda.



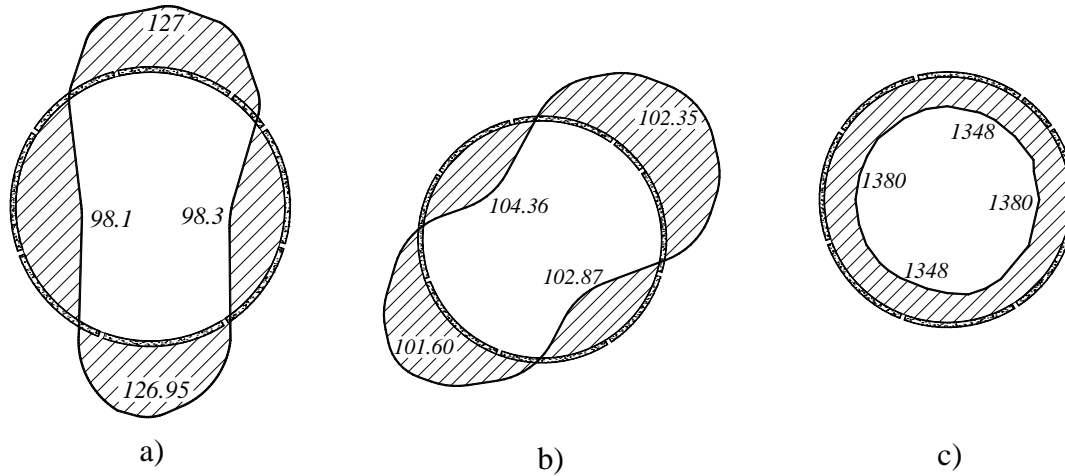
**Figura 5.51 a) puntos de control de mediciones y b) desplazamientos observados.**

Las curvas calculadas numéricamente se comparan con las reportadas experimentalmente por Aguilar *et al.* (2011) mostradas en la Figura 5.52 a y b, donde se observa la carga aplicada contra el desplazamiento medido en la dirección del acortamiento y la expansión, con las que se obtuvo, a través de las áreas bajo las curvas, un error relativo de 3.09% y 2.93% , respectivamente.



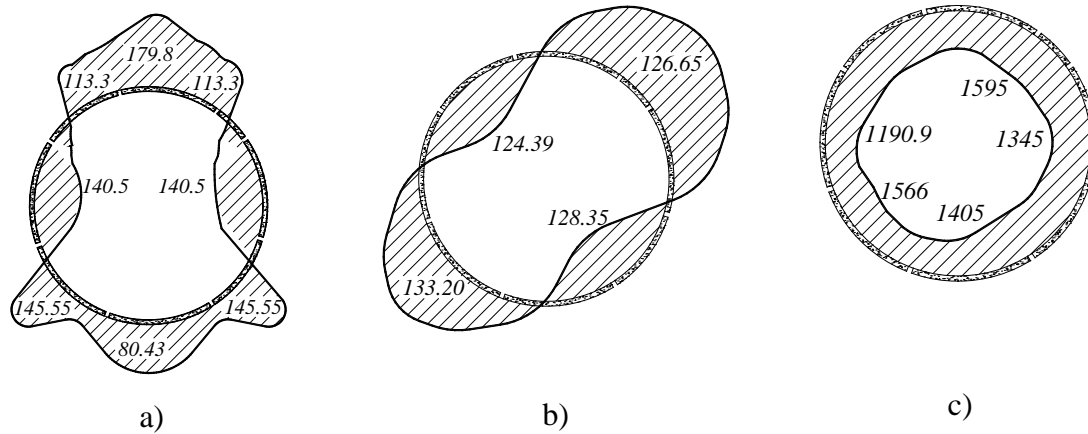
**Figura 5.52 Curvas carga vertical contra desplazamiento: a) acortamiento entre los puntos 1-7 y expansión entre los puntos 10-4**

Los elementos mecánicos obtenidos en la primera etapa de carga se muestran en la Figura 5.53, los cuales no alcanzan la superficie de falla en momento de los modelos constitutivos, cortante y fuerza axial.

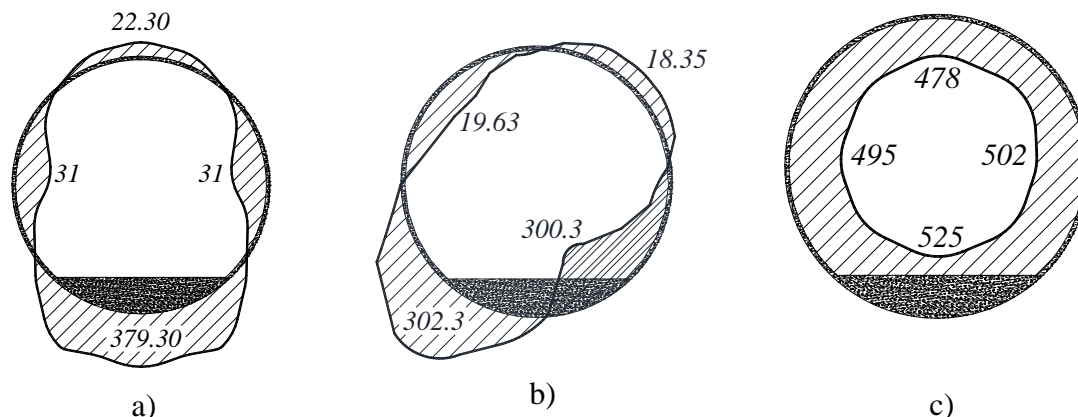


**Figura 5.53 Elementos mecánicos: a) momento (kN-m), b) cortante (kN) y c) fuerza normal (kN)**

Los elementos mecánicos máximos obtenidos en la segunda etapa para el anillo formado por dovelas y los del revestimiento secundario se muestran respectivamente en las Figuras 5.54 y 5.55. Al igual que en la primera etapa, estos valores se encuentran dentro del intervalo elástico correspondiente en cada modelo constitutivo.



**Figura 5.54 Elementos mecánicos del anillo dovelado: a) momento (kN-m), b) cortante (kN) y c) fuerza normal (kN)**



**Figura 5.55 Elementos mecánicos del revestimiento secundario: a) momento kN-m, b) cortante y c) fuerza normal kN**

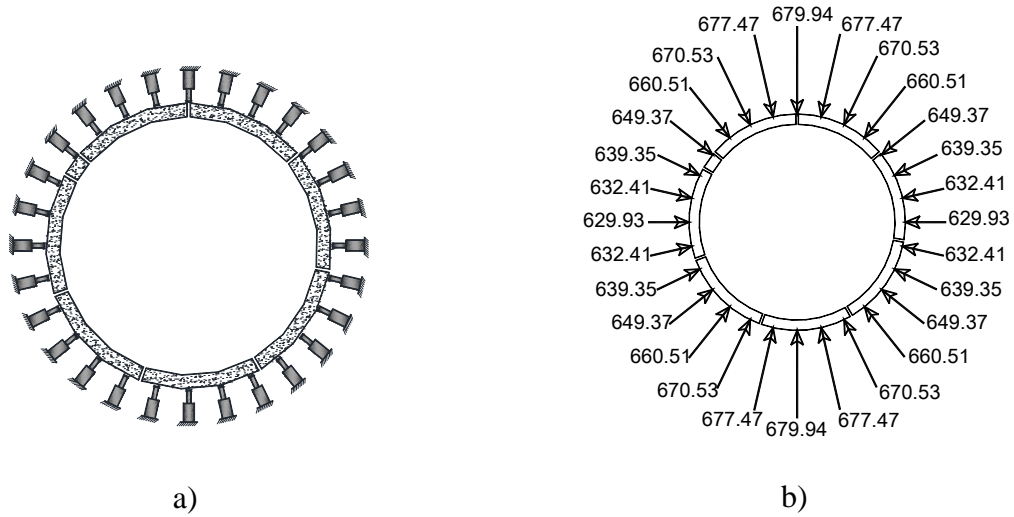
De los resultados obtenidos se puede concluir que: las curvas experimentales de acortamiento vertical y expansión horizontal que definen la ovalización de la estructura son congruentes con las obtenidas numéricamente. Los elementos mecánicos no excedieron los límites elásticos mostrados en los comportamientos constitutivos por lo que se considera que no hubo daño en la estructura y se determinó el incremento de rigidez por la incorporación del revestimiento secundario, lo cual es consistente con Aguilar *et. al.* (2011).

#### 5.3.1.2 Túnel B

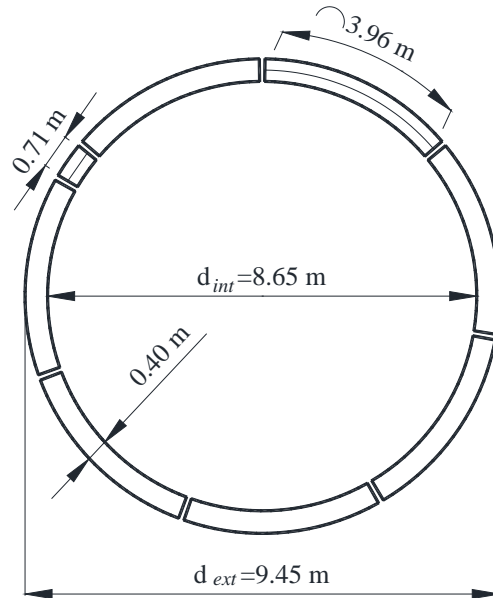
Se desarrolla el modelo numérico del experimento realizado por Blom y van Oosterhout (2001), que consistió de una estructura formada por tres anillos dovelados a los que se le aplicaron cargas en dos etapas a través de veintiocho gatos hidráulicos, como se muestra en la Figura 5.56a. La primera carga consistió en una fuerza uniforme de 654.94 kN en cada gato y, posteriormente, se aplicó una carga de ovalización de 25 kN, con las que se obtuvo el estado de fuerzas máximas mostrado en Figura 5.56b.

La geometría del anillo central se muestra en la Figura 5.57, que está formado por siete dovelas de longitud en arco de 3.96 m, más una cuña de 0.71 m, tiene un diámetro interno  $d=8.65$  m, las dovelas tienen sección gruesa de ancho  $L=1.50$  m y espesor  $h=0.40$  m; con acero de refuerzo longitudinal de  $6.48$  cm<sup>2</sup> en la parte superior e inferior, respectivamente; el refuerzo transversal está formado por anillos con área total de  $2.85$  cm<sup>2</sup> distribuidos a una distancia correspondiente a la altura efectiva media, de acuerdo a los parámetros mostrados en la Figura 5.40. La junta longitudinal, como se muestra en la Figura 3.21a, tiene un ancho  $b=1.39$  m y una altura  $a=0.17$  m. Las propiedades mecánicas del concreto son: módulo de Young  $E_c=33.5$  GPa y esfuerzo a compresión  $f'_c=27$  MPa. El acero de refuerzo tiene como propiedades mecánicas: módulo de Young  $E_s=200$  GPa y esfuerzo a la fluencia  $f_y=435$  MPa.





**Figura 5.56 a) aplicación de fuerzas y b) cargas máximas (kN)**



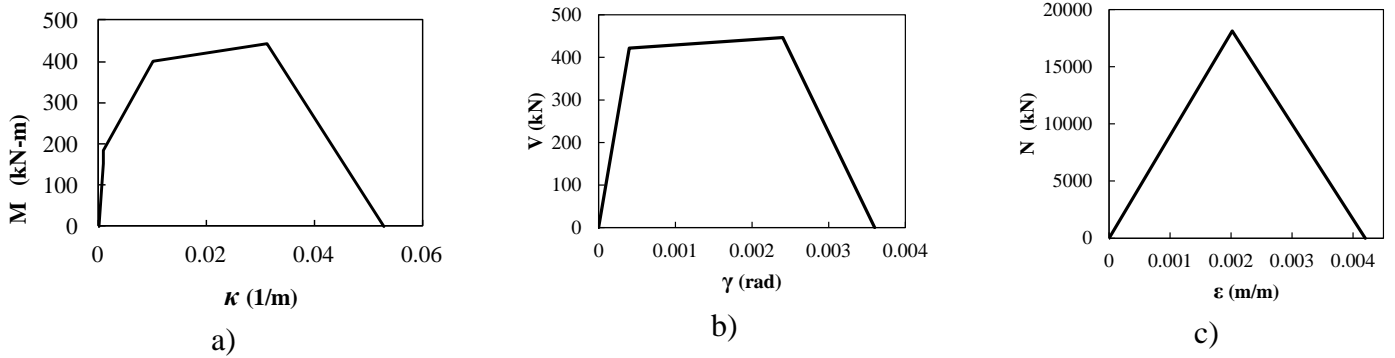
**Figura 5.57 Geometría del túnel B.**

#### 5.3.1.2.1 Modelo numérico

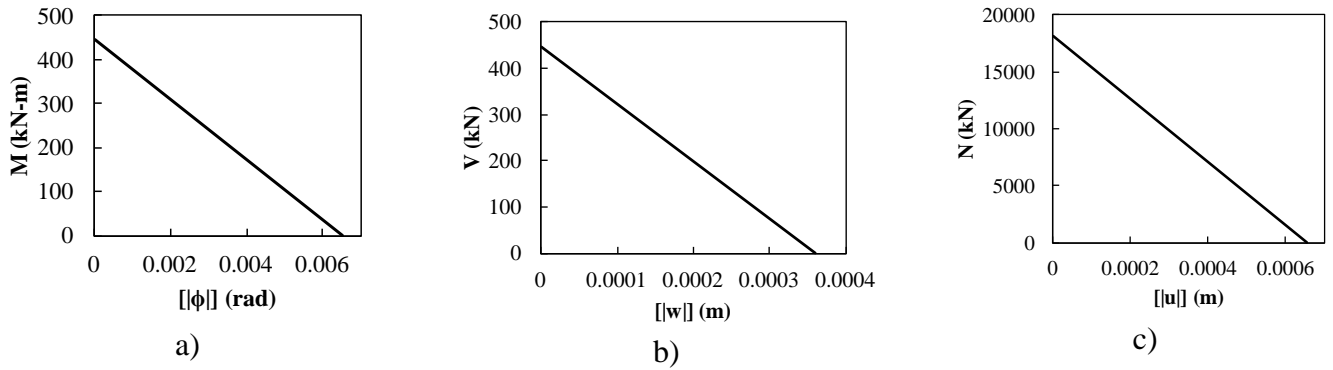
Para realizar el modelo se utilizó la discretización mostrada en la Figura 5.42a, en el que se utilizan elementos viga-columna gruesas con discontinuidades para simular el comportamiento de las dovelas y juntas longitudinales. Al igual que el modelo resuelto en la sección 5.3.1.1, se consideró la interacción de los anillos vecinos mediante resortes axiales con rigidez,  $K_v$ , que representa el contacto entre las maderas contrachapadas.

### 5.3.1.2.2 Modelos constitutivos

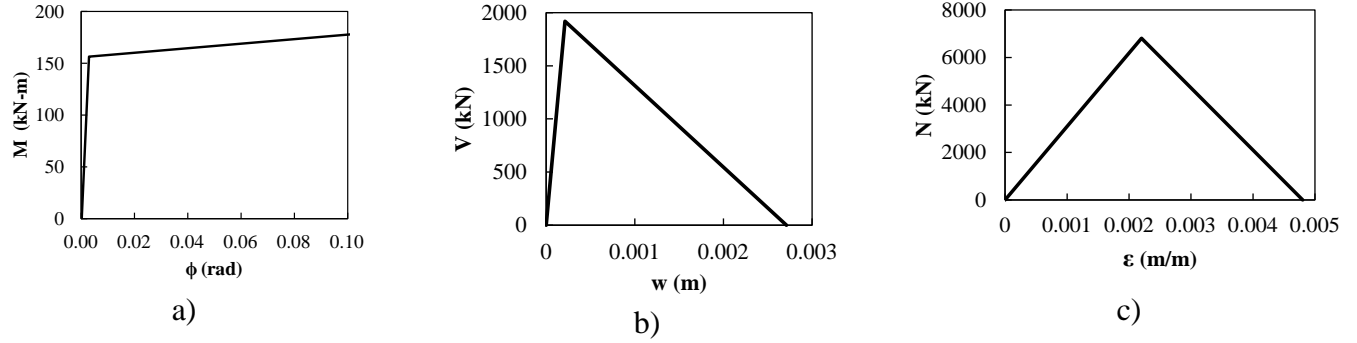
Los comportamientos constitutivos para el elemento viga-columna gruesa se realizaron con las propiedades mecánicas y geométricas, los cuales se muestran en la Figura 5.58 para el elemento viga-columna de la dovela y los de las juntas longitudinales en la Figura 5.60. En las Figuras 5.59 y 5.61 se muestran respectivamente los comportamientos constitutivos discretos para los intervalos de saltos de rotación, desplazamientos transversales y axiales, para los elementos dovelas y junta longitudinal.



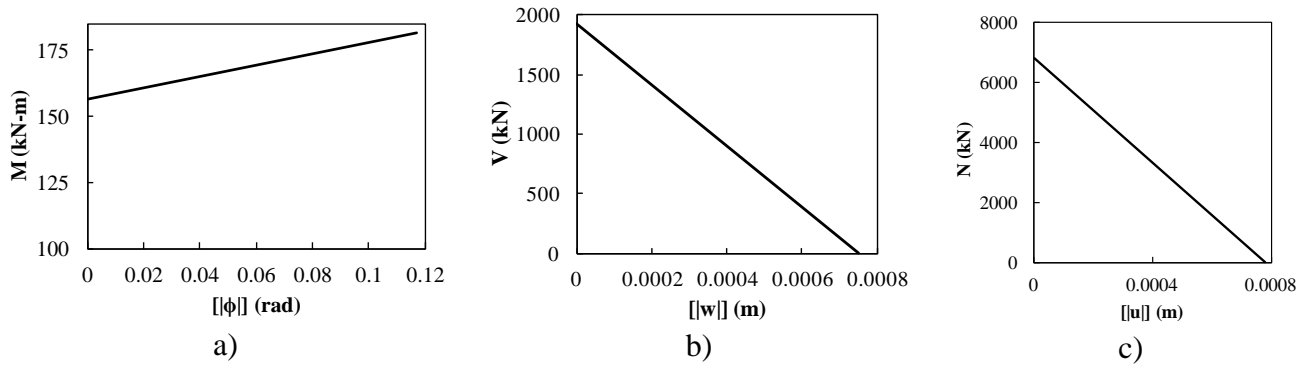
**Figura 5.58 Modelos constitutivos del elemento viga-columna para las dovelas: a) momento-curvatura, b) cortante-deformación y c) fuerza normal-deformación axial.**



**Figura 5.59 Comportamientos constitutivos discretos de las dovelas: a) momento contra salto de rotación, b) cortante contra salto de desplazamiento transversal y c) fuerza normal contra salto en el desplazamiento axial.**



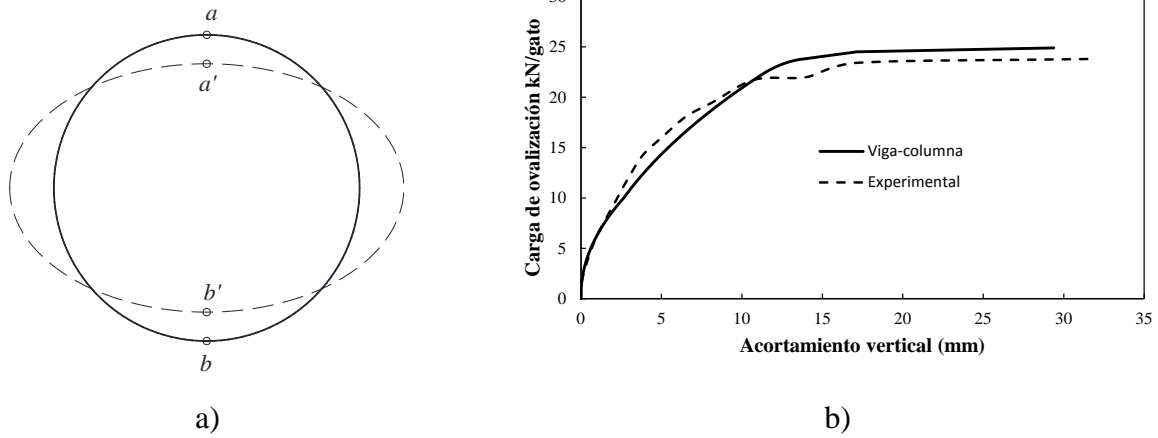
**Figura 5.60 Modelos constitutivos para la junta longitudinal: a) momento-rotación idealizado, b) cortante-desplazamiento y c) fuerza normal-deformación.**



**Figura 5.61 Comportamientos constitutivos discretos en la junta longitudinal: a) momento contra salto de rotación, b) cortante contra salto de desplazamiento y c) fuerza normal contra salto en desplazamiento axial.**

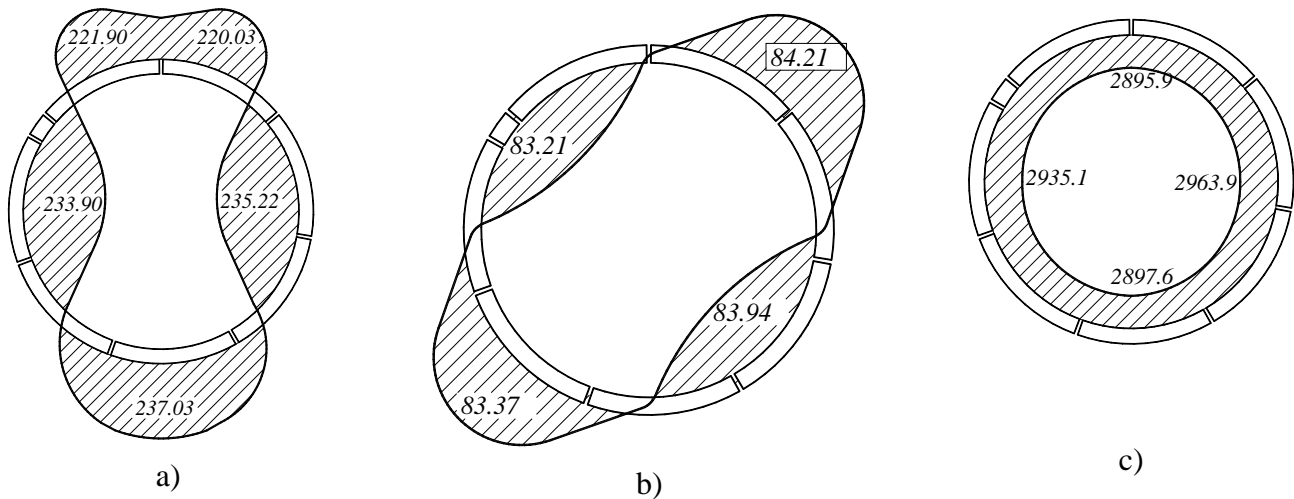
#### 5.3.1.2.3 Resultados

En la prueba experimental, al igual que en los resultados numéricos, se determinó el acortamiento en la línea *a-b*, mostrada en la Figura 5.62a, contra el incremento de la carga de ovalización, debido a que la carga uniforme no produce la configuración ovalada. Ambos resultados se comparan en la Figura 5.62b, en la cual se observa similitud entre ellas para valores menores a 10 kN, para valores mayores se presentan diferencias las cuales se atribuyen a las posibles irregularidades físicas del modelo experimental. El error relativo entre ambos resultados es 4.57%, que se obtuvo comparando las áreas de las dos curvas.

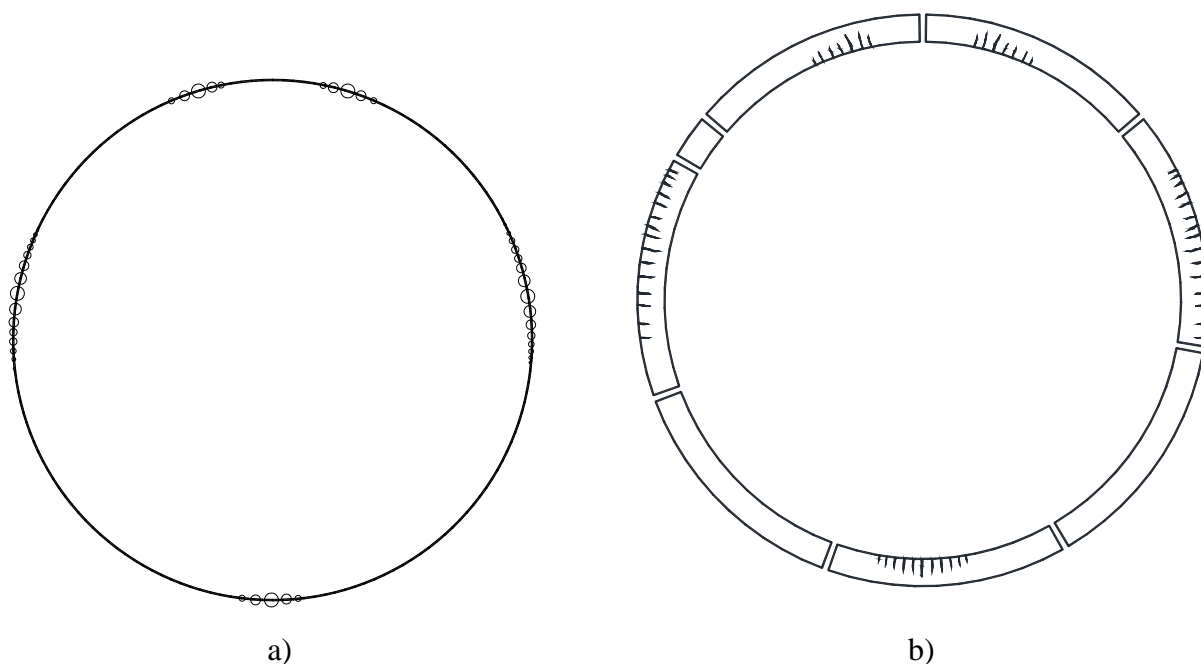


**Figura 5.62 Comportamiento del modelo experimental y numérico: a) conformación deformada y b) curva carga contra el acortamiento vertical**

Los elementos mecánicos máximos obtenidos con el modelo numérico se muestran en la Figura 5.63, en las cuales se observa que los valores de fuerza normal y cortante no alcanzan los valores umbrales en los respectivos modelos constitutivos, a diferencia del diagrama de momentos en las cuales existen elementos tanto de las juntas longitudinales como en las dovelas que exceden la capacidad a flexión, por lo que se presentan las articulaciones mostradas en la Figura 5.64a en la cual los círculos representan la evolución de las articulaciones, siendo los de mayor diámetro las zonas donde se desarrollaron los mayores elementos mecánicos mostrados en la Figura 5.63a, lo cual es congruente con los resultados experimentales que reportan el agrietamiento en el anillo central como se muestra en la Figura 5.64b.



**Figura 5.63 Elementos mecánicos: a) momento (kN-m), cortante (kN) y c) fuerza normal (kN)**



**Figura 5.64 Zonas articuladas en el anillo central: a) modelo numérico y b) prueba experimental (adaptado de Luttikholt 2007)**

Se realizaron dos modelos numéricos de túneles dovelados, que fueron sometidos a pruebas experimentales. El primero, túnel A, no presentó daño en ninguno de sus elementos, ya que no excedieron los límites elásticos para fuerza axial, cortante y momento, de acuerdo a los correspondientes comportamientos constitutivos; esto concuerda con lo reportado en el experimento por Aguilar *et al.* (2011), quien menciona que no se visualizó algún tipo de daño en la estructura. En el segundo caso, el túnel B si presentó daño mediante la formación de articulaciones, que representan los agrietamientos en las zonas más esforzadas a flexión, lo cual se comparó con los comportamientos constitutivos y se observó que el límite elástico del comportamiento momento-curvatura fue excedido, más no así en el cortante y fuerza axial.

# ***CAPÍTULO 6***

## **Conclusiones y Recomendaciones**

---

### **6.1 Conclusiones**

Se desarrolló el elemento finito viga-columna para estudiar los mecanismos de colapso y de estructuras en el plano formadas por columnas y vigas. El elemento finito se desarrolló para casos de viga-columna delgada y gruesa con discontinuidades, con base en las teorías de Euler-Bernoulli y Timoshenko, respectivamente.

El trabajo incluye el desarrollo e implantación de los modelos constitutivos de daño, para momento-salto en rotación, cortante-salto en los desplazamientos transversal por cortante y fuerza normal-salto en los desplazamientos axiales.

Una vez realizada la formulación, implantación y aplicación del elemento finito viga-columna se concluye que:

- El elemento finito viga-columna en sus dos versiones es capaz de modelar adecuadamente discontinuidades en los campos de desplazamientos y rotación de vigas y columnas, de acuerdo con los resultados obtenidos en los modelos numéricos resueltos.
- La implantación desacoplada de los comportamientos constitutivos facilita el proceso de cómputo, ya que no se presentaron problemas de convergencia.
- No se detectó problemas de malla, puesto que el principio de discontinuidades embebidas no permite la disociación de la malla.
- La estructura matricial para ambos casos, viga-columna gruesa o delgada, permite el cálculo de rigideces para elementos con y sin daño en cualquiera de los tres grados de libertad, por lo que es posible el cálculo de estructuras bajo comportamiento elástico o inelástico.
- Las matrices de rigideces de ambos elementos son simétricas, lo que facilita el proceso de cálculo y evita problemas de inestabilidad numérica que pueden presentar otras aproximaciones.
- Los términos de rigidez axial consideran desacoplados los efectos de flexión y cortante, lo cual permite incluirlos en las matrices de rigideces de vigas delgadas o gruesas y con ello considerar las tres posibles discontinuidades del elemento viga-columna.

- Los modelos constitutivos de daño permiten modelar el comportamiento completo del elemento desde su comportamiento elástico, inicio y evolución de las discontinuidades hasta el colapso total.
- Aun cuando los ejemplos de aplicación se realizaron a estructuras de concreto reforzado, los elementos desarrollados no se limitan solo a este tipo de material, ya que basta modificar los comportamientos constitutivos de otros materiales que forman el elemento estructural, para que estos puedan ser utilizados.
- Los elementos se aplican eficientemente para el estudio de estructuras sometidas a cargas monotónicas, las cuales se pueden aplicar mediante desplazamientos graduales para evitar inestabilidad numérica en el proceso de cálculo.
- Con el elemento viga-columna se puede evaluar numéricamente la capacidad residual de un elemento estructural que ha experimentado daño y requiera ser utilizada o recomendar la reparación.
- Los resultados de vigas-columnas gruesas respecto a las delgadas muestran diferencias atribuidas a la deformación por cortante.
- Con el elemento viga-columna se pueden realizar modelados numéricos para simular pruebas experimentales previas a su ejecución y con ello tener una aproximación de los resultados esperados.
- Los elementos finitos vigas-columnas, desarrolladas en este trabajo de investigación, se pueden aplicar a estructuras, donde se requiera analizar las causas de su colapso o daño experimentado.

## **6.2 Recomendaciones**

Luego de desarrollar y aplicar el elemento viga-columna, se recomienda:

- Cuando la estructura sea compuesta por elementos delgados, cuya relación (altura de la sección-largo del elemento estructural)  $\frac{h}{L} \leq 0.20$ , utilizar elementos viga-columna delgada y en caso contrario viga-columna gruesa, puesto que a para relaciones mayores los desplazamientos por cortante toman importancia como se mostró en el ejemplo de la sección 5.1.4.
- Realizar modelos numéricos para predecir resultados de pruebas experimentales de comportamientos constitutivos de los materiales, específicamente en ablandamiento negativo en cortante-desplazamiento transversal y momento-rotación.

### **6.3 Trabajos futuros**

El estudio puede ampliarse con los siguientes trabajos:

- Desarrollar formulaciones para elementos vigas-columnas no prismáticos con discontinuidades.
- Considerar elementos de concreto con pre-esfuerzo y post-tensado.
- Desarrollar las formulaciones y algoritmos para obtener elementos viga-columnas con discontinuidades para resolver problemas donde la acción es debida a cargas dinámicas.
- Considerar comportamientos constitutivos de elementos estructurales reparados.
- Formular algoritmos y formulaciones para soluciones en las se consideren estructuras en 3D.
- Realizar aplicaciones de modelos multi-escala con elementos viga-columna con discontinuidades.



## Referencias

---

- [1] Aguilar, O., Mendoza, L. Tavera, E., Alberto, Y. y Morelos, J. (2011), **Prueba de carga en un modelo a escala real de un túnel de dovelas con revestimiento secundario**, Conferencia, 2011 Pan-Am CGS Geotechnical Conference, Toronto, Canada.
- [2] Aguilar, R. y Barbat, A. (1997), **Daño sísmico en estructuras de hormigón armado**, Centro de Investigaciones Científicas. Escuela Politécnica del Ejército, 238 p, Valle de los Chillos, Ecuador.
- [3] Armero, F. y Ehrlich, D. (2004), **An analysis of strain localization and wave propagation in plastic models of beams at failure**, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 193, pp. 3129-3171.
- [4] Armero, F. y Ehrlich, D. (2006), **Numerical modeling of softening hinges in thin Euler-Bernoulli beams**, Computer and Structures, vol. 84, pp. 641-656.
- [5] Baker, J.B., Hyman, J. (1969), **Plastic design of frames**, Vols. 1 y 2, Cambridge University Press.
- [6] Blom, C.B.M. (2002) **Design philosophy for concrete linings of tunnels in softsoils**, Disertación, TU Delft University of Technology, Países Bajos.
- [7] Blom, C.B.M. y van Oosterhout, G.P.C (2001), **Full-scale laboratory test on a segment lining**, Reporte técnico, Project Organization HSL South, Delft, Países Bajos.
- [8] Ceb-fib (2012), **Model Code MC2010**, Final Draft, International Federation for Structural Concrete (fib), Suiza.
- [9] Cranston, W.B. (1965), **Tests on reinforced concrete frames, 1: Pinned portal frames**, Reporte técnico TRA/392, Cement and Concrete Association, London.
- [10] CSI-2005 (2005), **CSI analysis references manual for SAP2000, ETABS y SAFE**, Computer and Structures.
- [11] Dujc, J., Brank, B. y Ibrahimbegovic, A. (2010), **Multi-scale computational model for failure analysis of metal frames that includes softening and local buckling**, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 199, pp. 1371-1385.

- [12] Ehrlich, D. y Armero, F. (2004), **Finite element methods for the analysis of softening plastic hinges in beams and frames**, Computer and Mechanics, vol. 35, pp. 237-264.
- [13] El Comercio (2013), **Dos causas provocaron la caída del túnel de la avenida Tufiño**, Diario El Comercio, Quito, Ecuador.
- [14] Gijssbers, F. B. J. y Hordicjk, D. A. (1997), **Experimental research on the shearing behavior of ring joints**, TNO-report COB K111.
- [15] Ikegawa, T., Saito, H., Ohuchi, H., Kitoh, H. y Tsunokake, H. (2009), **Flexural and shear tests of reinforced concrete beams with low grade recycled aggregate** Reporte Técnico, Universidad de la Ciudad de Osaka, Japón.
- [16] Janssen, P. (1983), **Tragverhalten von Tunnelausbauten mit Gelenktübbings**, Tesis, University of Braunschweig, Departamento de Ingeniería Civil, Instituto de Análisis Estructural.
- [17] Juárez, G. (2006), **Modelado numérico de problemas de fractura en sólidos mediante discontinuidades interiores**, Tesis doctoral, Universidad Nacional Autónoma de México, México.
- [18] Juárez, G. y Ayala, A.G. (2012), **“Finite element variational formulation for beams with discontinuities”**, Finite Elements in Analysis and Design, vol. 54, pp. 37-47.
- [19] Juárez-Luna, G., Méndez-Martínez, H. y Ruiz-Sandoval, M. (2014), **An isotropic damage model to simulate collapse in reinforced concrete elements**, Latin American Journal of Solids and Structures, vol. 11(13), pp. 2444-2459.
- [20] Jukic, M., Brank, B. y Ibrahimbegovic, A. (2013), **Embedded discontinuity finite element for failure analysis of planar reinforced concrete beams and frames**, Engineering Structures, vol. 50, pp. 115-125.
- [21] Jukic, M. (2013), **Finite element for modeling of localized failure in reinforced concrete**, Disertación doctoral, Ljubljana, Univerza v Ljubljana, Slovenia.
- [22] Leonhard, F. y Reimann, H. (1966), **Betongelenke**, Der Bauingenieur 41, pp. 49-56.
- [23] Li, K. N. (1996), **CANNY-E User’s manual**, Canny Consultants, Pte. Ltp, Singapur
- [24] Lutikholt, A. (2007), **Ultimate limit state analysis of a segmented tunnel lining**, Tesis de maestría, TU Delft University of Technology, Países Bajos.

- [25] Menéndez, M. (2013), **Colapsa túnel en Rusia**, Artículo7, México, <http://a7.com.mx/index.php?notaid=17975>.
- [26] Muttoni, A., y Fernandez, M., (2008), **Shear strength of members without transverse reinforcement as function of critical shear crack width**, ACI Structural Journal, Vol. 105(2), pp. 163-172.
- [27] Nilson, A. H. y Darwin, D. (2002), **Design of concrete structures**, 13a edición, McGraw Hill, Estados Unidos.
- [28] Oliver, J. (2000), **On the discrete constitutive models induced by strong discontinuity kinematics and continuum constitutive equations**, International Journal Solids and Structures, vol. 37, pp. 48-50.
- [29] Prakash, V., Powell, G. H. y Campbell, S. D. (1993), **DRAIN-2DX-version 1.02 User's Guide, Report No. UCB/SEMM-93/17**, Civil Engineering Department, University of California, Berkeley.
- [30] Pang, X. y Hsu, T. (1996), **Fixed angle softened truss model for reinforced concrete**, Reporte Técnico, ACI Structural Journal, vol. 93(2), pp. 196-208.
- [31] Park, R. y Paulay, T. (1978), **Estructuras de concreto reforzado**, Departamento de Ingeniería Civil, Universidad de Canterbury, Nueva Zelandia. Sexta impresión (1992), Limusa.
- [32] Park, R., Priestley, M. y Gill, W. (1982), **Ductility of square confined concrete columns**, Journal of Structural Division, ASCE, vol. 108 (4), pp. 929-950.
- [33] Pfrang, E. y Marshall, R. (1982), **Collapse of the Kansas City Hyatt Regency walkways**, American Society of Civil Engineering- ASCE, vol. 52, pp. 65-68.
- [34] Rots, J.G. and de Borst, R., (1987). **Analysis of mixed-mode fracture in concrete**, Journal of Engineering Mechanics-ASCE, Vol. 113(11): pp. 1739-1758.
- [35] Sarkhosh, R., (2014), **Shear resistance of reinforced concrete beams without shear reinforcement under sustained loading**, Disertación, TU Delft University of Technology, Países Bajos.
- [36] Scott, J. (2010), **Interface shear strength in lightweight concrete bridge girders** Tesis de Maestría, Virginia Polytechnic Institute and State University, Estados Unidos.
- [37] Simo, JC y Ju, J. (1987), **Strain and stress based continuum damages models, Part I: Formulation**, International Journal Solids and Structures, vol. 23, pp. 821-840.

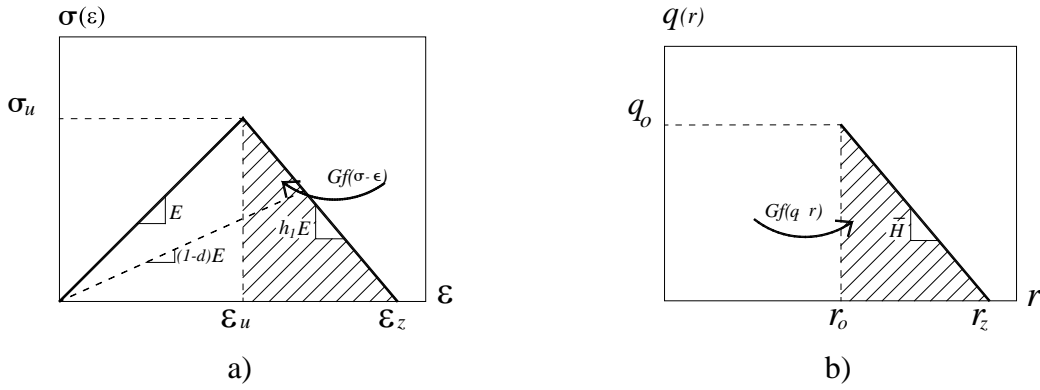
- [38] Taylor, R. (2008a), **Finite element analysis program**, Berkeley, Universidad de California, Estados Unidos.
- [39] Taylor, R. (2008b), **Finite element analysis program**, Manual del programador, Berkeley, Universidad de California, Estados Unidos.
- [40] Tena, A. (2007), **Análisis de estructuras con métodos matriciales**, primera edición, Limusa, México.
- [41] Triantafyllou, S.P. y Koumousis, V.K., (2011), **An inelastic Timoshenko beam element with axial-shear-flexural interaction**, Computer and Mechanics, vol. 48, pp. 713-727.
- [42] Van der Waart van Gulik, T.G. (2010), **Snap through of large shield driven tunnels**, Tesis de Maestría, TU Delft University of Technology, Países Bajos.
- [43] Vecchio, F. J. y Emara, M. B., (1992), **Shear deformations in reinforced concrete frames**, ACI Structural Journal 89, 1: 46–56.
- [44] WHO (2013), **Building collapse in Savar, Dhaka, Bangladesh** Situation report- 6, World Health Organization.

# ANEXOS

## Anexo A

Determinación de parámetro de ablandamiento  $\bar{H}$ .

La Figura 0.1a muestra la curva esfuerzo contra deformación en la cual se observa la energía de disipación  $Gf$  en el espacio  $\sigma$ - $\epsilon$ , y en la Figura 0.1b se muestra la correspondiente energía en el espacio  $q$ - $r$  de la curva de la función de ablandamiento  $q(r)$ .



**Figura 0.1 a) comportamiento esfuerzo-deformación, b) función de ablandamiento  $q(r)$ .**

De acuerdo con Juárez-Luna *et al* (2014), el límite de la función  $q(r)$  es:

$$r_o = q_o = \frac{\sigma_u}{\sqrt{E}} \quad (7.1)$$

La energía de fractura en el espacio  $\sigma$ - $\epsilon$  es:

$$Gf = \frac{1}{2} \sigma_u (\epsilon_z - \epsilon_u) \quad (7.2)$$

y en el espacio  $q$ - $r$  es:

$$Gf = \frac{1}{2} q_o (r_z - r_o) \quad (7.3)$$

Las variaciones  $\epsilon$  y  $r$  son:

$$\begin{aligned}
 (\varepsilon_z - \varepsilon_u) &= \frac{\sigma_u}{h_1 E} \\
 (r_z - r_o) &= \frac{q_o}{\bar{H}}
 \end{aligned}
 \tag{7.4}$$

Sustituyendo la ec. (7.4) en las ecs. (7.3) y (7.2) se obtiene:

$$\begin{aligned}
 Gf &= \frac{\sigma_u^2}{2h_1 E} \\
 Gf &= \frac{q_o^2}{2\bar{H}}
 \end{aligned}
 \tag{7.5}$$

igualando  $Gf$  se tiene:

$$\frac{q_o^2}{\bar{H}} = \frac{\sigma_u^2}{h_1 E}
 \tag{7.6}$$

Sustituyendo la ec. (7.1) en la ec. (7.6) se determina que:

$$h_1 = \bar{H}
 \tag{7.7}$$